情報価値のモデルと Decision by Sampling モデルによる確率荷重関数の導出

―ベイズ統計モデリングによるモデル比較―

清水裕士[a]

要約

累積プロスペクト理論では，客観的に提示された確率を主観的に変換して意思決定を行うことを予測している．これまで提案されてきた確率荷重関数は，公理論的なアプローチによって導出されたものと，心理学的メカニズムから導出されたもの，の二つのタイプがあるが，心理学的なパラメータの解釈が困難なものが多い．そこで本研究は認知心理学の情報処理メカニズムを説明する Decision by Sampling モデルから新しい確率荷重関数の提案を試みた．まず確率情報の価値が KL 情報量によって表現できると仮定したうえで，その DbS モデルに基づいて確率荷重関数を導出すると，ベータ分布の累積分布関数を導くことができた．ベイズ統計モデリングによるモデル比較の結果，提案モデルは先行研究で提案されていたモデルより予測力は相対的に悪かった．しかし，ベンチマークモデルとの比較から，十分な予測力があると評価することができた．

JEL　分類番号：D91, C51
キーワード：累積プロスペクト理論　確率荷重関数　Decision by Sampling，ベイズ統計モデリング

---

[a] 関西学院大学社会学部 hsimizu@kwansei.ac.jp

1. Introduction

Tversky & Kahneman(1992)はプロスペクト理論を公理化するとともに，具体的な関数を数理的に与えた累積プロスペクト理論（CPT）を提唱した．CPT では効用関数（プロスペクト理論では価値関数vという）に加えて，客観的な確率を主観的に変換することを想定する確率荷重関数を想定する．

確率荷重関数の具体的な関数は，多くの研究で提案されている．それらは大きく分けて，2 つにカテゴライズすることができる．1 つは公理的なアプローチによって導出されたもの，もう 1 つは心理学的なメカニズムから提案されたものである．第一の公理的アプローチとしては，Prelec(1998)のモデルや Gonzalez & Woo(1999)のモデルが挙げられる．心理学的なメカニズムから提案されたものとして，遅延価値割引モデルから拡張した，Rachlin, Raineri, & Cross（1991）のモデルがある．しかし，遅延価値割引のモデルは，データドリブンな関数系であるため，パラメータの心理学的な解釈が困難である点に問題がある．

これら以外に，心理学的なメカニズムの観点から確率荷重関数の形状を説明したモデルに Decision by Sampling（DbS）がある（Stewart, Chater, & Brown, 2005）．DbS は，心理経済学的な関数の曲線を説明するために提案された．DbS では，効用関数や確率荷重関数といった心理経済的な関数ついて，次の仮定を想定する．それは，ターゲットとなる価値や確率は，長期記憶から無作為に抽出した価値や確率とそれを比較し，その大小関係から相対的な価値や確率の大きさが主観的に見積もられるというものである．すなわち，価値や確率の大きさは，その絶対的な値ではなく，記憶に基づいた相対的な大きさへ主観的に変換されるということである．

Keren & Teigen (2001)は，人々が確率情報について偏った認知をしていることを明らかにした．それによれば，呈示された確率が 0 と 1 に近いほど，人々はそれを価値があると判断している．中村(2008a)は，この確率情報と価値の関係を，KL 情報量によって表現できることを明らかにした．KL 情報量とは，2 つの確率分布の距離を表す指標であり，離散分布p,qについて$KL(p||q)=\sum_{i=1}^{n} p_i \log\left(\frac{p_i}{q_i}\right)$と表すことができる．中村（2008a）は，人々が確率情報に対する価値の大きさを KL 情報量の関数によって，よく予測できることを実証的に明らかにしている．また中村（2008b）は，KL 情報量の形状が Stewart らが得た確率情報の頻度分布と類似していることに注目した．彼は，人々が KL 情報量が高い，すなわち確率情報の有益性を高く評価することによって記憶が促進され，DbS の仮定から確率荷重関数がプロスペクト理論で指摘されているような形状になりうることを推論している．

2. 提案モデルと比較モデル

DbS の仮定を数理的に表現しなおせば，次のようになる．いま長期記憶からサンプリングされた列$q_i = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$について，客観的に呈示された確率$p$と比較して，$p$のほうが大きいときに 1，そうでないときに 0 をとる関数δを考えたとき，確率荷重関数は

$$W(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta(p \geq q_i) \tag{1}$$

とあらわすことができる．また，サンプリングされた数nが十分に大きいとき，サンプリング列q_iはある確率密度関数$f(q)$から抽出されたとみなした上で，

$$W(p) = \int_0^p f(q)\,dq = F(p) \tag{2}$$

と表すことができる（Bhui & Gershman, 2018）．なお$F(p)$は$f(q)$の累積分布関数である．すなわち，長期記憶からのサンプリングを表現する確率密度関数を心理学的に導出することができれば，DbS は数学的に確率荷重関数を与えることができる．

そこで中村（2008b）に従い，意思決定者の事前信念ωを持つ確率分布と客観的に呈示された確率情報qに基づく確率分布の KL 情報量によって表されると仮定する．ここで，クジが当たったとき，外れたときのそれぞれの情報量の大きさに個人差$\gamma \geq 0$を重みとして想定し，その関数を$H(q|\omega,\gamma)$で表す．Hはある意思決定者がパラメータ$\omega, \gamma,$をもつとき，確率情報 q が与えら得たときの有益さ（記憶のしやすさ）を表す関数である．　これらを仮定することで，確率情報qの記憶のされやすさは，

$$H(q|\omega,\gamma) = \sum_{i=0} \omega_i \gamma \log\left(\frac{\omega_i}{q_i}\right) = \gamma\left\{\omega \log\left(\frac{\omega}{q}\right) + (1-\omega)\log\left(\frac{1-\omega}{1-q}\right)\right\} \tag{3}$$

と書ける．Hは確率情報qの記憶のされやすさを表す関数であるが，実際に長期記憶からのサンプリングは，DbS の仮定から，確率密度関数fとして表現されなければならない．そこで情報量は確率の対数であるため, 以下の softmax 関数によってその確率密度関数$f(q|\omega,\gamma)$に変形できると仮定する．すると

$$f(q|\omega,\gamma) = \frac{\exp\big(H(q|\omega,\gamma)\big)}{\int_0^1 \exp\big(H(q|\omega,\gamma)\big)\,dq} = \frac{1}{B\big(1-\gamma\omega, 1-\gamma(1-\omega)\big)} q^{-\gamma\omega}(1-q)^{-\gamma(1-\omega)} \tag{4}$$

となる．Bはベータ関数である．このとき$a = 1-\gamma\omega, b = 1-\gamma(1-\omega)$とすると，確率密度関数$f(q)$はパラメータ$a, b(>0)$を持つベータ分布となる. 求めるべき確率荷重関数$W(p)$は,

$$w(p|a,b) = \int_0^p \mathrm{Beta}(q|a,b)\,dq = \mathrm{Beta\_cdf}(p|a,b)$$

となり，ベータ分布の累積分布関数として表すことができる．これは犬童(2021)と結果的に

同じモデルとなる．ベータ分布$\mathrm{Beta}(q|a,b)$において，パラメータω,γはa,bを用いて，$\omega = \frac{a-1}{a+b-2}$，$\gamma = 2-(a+b)$,で表すことができる．さらに$a,b>0$のもとで， $0<\omega<1,\gamma>0$の条件から，a,bの取りうる範囲は$0<a<1,0<b<1$となることがわかる．

本研究では，DbS に基づく本研究の提案モデルが実際の人々の意思決定データとフィットしているかを検討すると同時に，他のモデルとの相対的な比較を行う．比較するモデルは，プロスペクト理論モデル，Prelec モデル，一般化双曲モデル，提案モデル（DbS-KL）を比較する．それらに加えて，ベンチマークモデルとして期待効用理論，そして理論的なインプリケーションをまったくもたないガウス過程モデルである．ガウス過程モデルは，機械学習などで用いられる，予測精度が非常に高いモデルである．ガウス過程モデルはそのメカニズムについて一切心理学的な説明を与えないが，データによりよい予測を与えるスムージングを自動的に行うことができる．それぞれの確率荷重関数を表 1 に記載した．

表 1

Expected Utility（EU）	$w(p) = p$
Tversky & Kahneman（TK）	$w(p) = \dfrac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}}$
Prelec	$w(p) = \exp\left(-\delta(-\log p)^\gamma\right)$
Generalized Hyperbolic（GHB）	$w(p) = \dfrac{1}{1+k((1-p)/p)^\alpha}$
DbS-KL	$w(p) = \mathrm{Beta\_cdf}(p|a,b)$
Gussian Process（GP）	$w(p) = \mathrm{logit}^{-1}\big(\delta(p)\big)$

3. 方法

参加者はクラウドワークスに登録しているワーカー600 名を対象に Web 上で実験を行った．実験画面は Qualtrics で作成した．

課題は，Gonzalez & Woo(1999)を参考に，確実等価点を推定するための二選択課題を行った．参加者は確実に得られるくじと，確率的に得られるくじを比較し，どちらを好むかを回答した．確率は 10%，25%，50%，75%，90%の 5 種類で，額は 1000 円，4000 円，1 万円，3 万円，8 万円の 5 種類を用いた．さらに，4000 円と 1 万円を上の 5 種類の確率で混合したくじ（たとえば 10%で 1 万円，90%で 4000 円）も用意した．それぞれの組み合わせごとに確実くじの金額を下げていき，最終的に 0 円になるように 12 段階（混合くじは

13 段階）に分割して回答者に提示した．よって，回答者は 5×5×12+5×13＝365 回の確実等価点課題を行った．

4. 結果

本研究では，確率等価点についての二選択課題データを，次の測定モデルを用いて，価値関数および確率荷重関数のパラメータの推定を行った．いま，確実くじを C，リスククジを U とし，回答者iがリスククジ U を選好する確率を$P_i(C \prec U)$，また確実クジ・リスククジの財の大きさをそれぞれx^c, x^uとしたとき，

$$P_i(C \prec U) = \frac{\exp\left(U\left(x_1^u, p_j;\ x_2^u, 1-p_j\right)\right)^{\lambda_i}}{\exp\left(U\left(x_1^u, p_j;\ x_2^u, 1-p_j\right)\right)^{\lambda_i} + \exp\left(U\left(x_j^c\right)\right)^{\lambda_i}} \tag{5}$$

というロジスティック行動戦略で表現できると仮定する．ただし，

$$U(x^c) = v(x^c), \qquad U(x_1^u, p;\ x_2^u, 1-p) = w(p)v(x_1^u) + \left(1 - w(p)\right)v(x_2^u).$$

である．また，$\lambda_i \in (0, \infty)$は回答者$i$の合理性を表すパラメータである．なお，価値関数については，$v(x) = x^\alpha$とし，価値関数パラメータαも同時に推定した．

モデルのパラメータを MCMC によるベイズ推定によって計算した．MCMC では，10 個のチェインそれぞれについて 1000 回の warmup，5000 回のマルコフ連鎖を発生させ，合計 5 万個の MCMC サンプルを得た．すべてのモデルのパラメータについて rhat は 1.01 を下回ったため，収束したと判断した．

各モデルの負の対数周辺尤度を計算したところ，表 2 のようになった．最も予測力が高かったモデルはガウス過程モデルであり，期待効用理論のモデルが最も予測力が低かった．TK の予測力は，他の Prelec，GHB，DbS-KL に比べて悪かった．提案モデルである DbS-KL は，GHB や Prelc よりも相対的に予測力は低かった．2 パラメータのモデルの中では，GHB が最もよく，Takemura（2016）の結果を再現した．

表 2

Models	-logml
Expected Utility(EU)	77410.08
Tversky & Kahneman(TK)	59691.48
Prelec	55803.20
Generalized Hyperbolic(GHB)	55717.42
DbS-KL	55994.09
Gussian Process(GP)	54172.20

5. 考察

本研究は，DbS モデルに基づいてプロスペクト理論における新しい確率荷重関数を提案した．これまでの確率荷重関数は公理論的に導出されたモデルや，パラメータの心理学的な解釈が難しいモデルが多かった．その中で，本研究が提案した DbS モデルに基づく確率荷重関数は，パラメータの心理学的解釈が可能なモデルであった．すなわち，パラメータωは主観的な確率評価についてのパラメータであり，リスク回避的かリスク選好的かを表す．続いてパラメータγはリスク情報に対する敏感さを表す．

ベイズ統計モデリングによって先行研究で示されたプロスペクト理論（TK）モデル，公理論的モデル（Prelec），遅延価値割引モデル（GHB），そして提案モデルである DbS-KL の確率荷重関数について予測力を検討したところ，遅延価値割引モデルである GHB が最も予測力が高かった．提案モデルは TK よりは良かったが，他の 2 つよりは予測力が悪かった．これらのモデルは，ベンチマークモデルである，EU モデルと GP モデルの間に位置づけられ，最も当てはまりが悪い期待効用モデルに比べ，2 パラメータモデル（Prelec,GHB,DbS-KL）はどれも相対的にはかなりよい予測力を持っていることが示された．

これらの結果から，データへの予測力については，理論的なインプリケーションを持たないモデルが優位となっているが，提案モデルも相対的には十分な予測力を持っていたと言える．モデルの妥当性は，データの予測力だけでなく，理論的な仮定の明確さと解釈可能なパラメタライゼーションであるとするならば，提案モデルは他のモデルに比べて心理学的には十分有益なモデルであると言えるだろう．

文献

犬童健良 2021 ベータ分布を用いた累積プロスペクト理論における確率ウェイト関数についての一考察．関東学院大学経済学紀要, 47, 1-29.

中村國則 2008a 「十分にありえる」方が「見込みがない」より有益な情報か？：言語確率の情報としての有益さとその情報理論的解釈，認知科学, 15, 174-187.

中村國則 2008b 確率加重関数の起源:二重過程理論・言語統計的アプローチからの分析，日本認知科学回大会発表論文集, 25, 310-315.

Rachlin, H., Raineri, A., and Cross, D. 1991 Subjective probability and delay. *J. Exp. Anal. Behav.* 55, 233–244.

Stewart, N., Chater, N., & Brown, G,DA,G. 2006 Decision by sampling. *Cognitive Psychology*, 53, 1-26.