# マッチング法則からの確率ウェイト関数の近似について

**犬童健良**[a]

**要約**

プロスペクト理論の際立った特徴は，参照点に依存するリスク選好を，価値関数と確率ウェイト関数を用いた評価局面で定量的にモデリングする点にある．ところが累積プロスペクト理論 CPT において，アレのパラドックス(Allais' paradox)を予測するパラメータ組が標準的な CPT のパラメータ組から大きく外れており，また参照点の移動を明示化したモデルでも本質的に改善しないことが知られている．本研究では，マッチング法則の下で確率ウェイト関数を近似し，その下でアレのパラドックスを予測できて，かつ参照点のシフトに対して感応的であることを示した．

JEL 分類番号：D81,D91

キーワード：プロスペクト理論， アレのパラドックス，確率ウェイト関数，マッチング法則

[a] 関東学園大学経済学部 kindo@kanto-gakuen.ac.jp

1. はじめに

アレのパラドックスとして知られる Allais(1953)の例題は，その典型的選択の組を予測可能な累積プロスペクト理論（CPT）のパラメータ範囲が，Tversky and Kahneman(1992)で想定された実証的な値と乖離することが知られる(犬童，2018a, 2018b; 大垣・田中，2018)．以下ではクジに対する選好を二項関係$\gtrsim$を用いて表す．

選択問題のペア1．賞金額 $x > y > 0$とすると，$f_1 = (x, p; 0, 1-p) \lesssim f_2 = (y, 1)$（確実性効果）かつ$f_3 = (x, \sigma p; 0, 1-\sigma p) = \sigma f_1 \gtrsim f_4 = (x, \sigma; 0, 1-\sigma) = \sigma f_2$（共通比効果）が典型的な選好の組である．とくに，$x = 400, y = 300, p = 0.8, \sigma = 0.25$.

選択問題のペア 2． 賞金額 $x > y > 0$，確率$p, q, p+q \in [0,1]$に対し，$g_1 = (x, p; y, q; 0, 1-p-q) \lesssim g_2 = (y, 1)$（確実性効果）かつ$g_3 = (x, p; 0, 1-p) \gtrsim g_4 = (y, 1-q; 0, q)$（共通結果効果）が典型的な選好組である．とくに，$x = 500, y = 100, p = 0.1, q = 0.89$.

累積プロスペクト理論の価値関数と確率ウェイト関数は以下のように定義される．

$$v(x) = \begin{cases} x^{\alpha}, x \geq 0, \\ v(x) = -\lambda(-x)^{\beta}, x < 0. \end{cases} \tag{1}$$

$$w^{+}(p) = \frac{p^{\gamma}}{(p^{\gamma} + (1-p)^{\gamma})^{1/\gamma}}, 0 < p < 1,$$
$$w^{-}(p) = \frac{p^{\delta}}{(p^{\delta} + (1-p)^{\delta})^{1/\delta}}, 0 < p < 1. \tag{2}$$

賞金額 $x > y > 0$のとき，$f = (x, p; y; 1-p)$に対する評価は次の式で計算される．

$$v(f) = w^{+}(p)v(x) + (1 - w^{+}(p))v(y). \tag{3}$$

CPT モデルは

$$f \gtrsim g \Leftrightarrow v(f) \geq v(g)$$

を意味する．文献では実証推定値の中央値，$\alpha = \beta = 0.88$，$\lambda = 2.25$，$\gamma = 0.61$，$\delta = 0.69$とされた（Tversky and Kahneman,1992）．犬童（2018a, 2018b）は，シミュレーション実験によってアレの例題を予測するCPTモデルのパラメータ範囲を抽出した．実験結果から，選択問題ペア2については予測できるとは言いにくい．

また犬童は参照点rと賞金額の差x’＝x－r，y’＝y－rを（3）式に代入した参照点シフト付きCPT のパラメータ境界を求めており，参照点のシフトによって選択問題ペア 2 に対する予測力が改善しないことを明らかにした．

まとめると，Kahneman とTversky(1979)は，アレのパラドックスに見られる，現実の人間の参照点依存選好をモデル化するべくプロスペクト理論を提案し，その改良版である累積プロスペクト理論(CPT)に精密化したが， CPT は元々のアレの例題を予測できるとは言いにくい．またその予測力

が参照点に依存しないという別のパラドックスが発生している．

プロスペクト理論で導入された確率ウェイト関数には，他の研究者が提案した別の関数形も知られている．しかし例えば Prelec(1998)の関数を代わりに用いても，前節の観察は大きく変わらない．興味深い事実として，Brandstätter et al. (2006)の提案している優先度ヒューリスティック(PH)のような非補償型の意思決定ルールを用いることで，アレの例題についても問題なく予測できる．ただし PH では個人差を説明できない．本研究では確率ウェイト関数と価値関数を用いる補償型意思決定ルールを用いるが，マッチング法則から確率ウェイトを近似する別の方法を示す．またこの方法は参照点のシフトに対して感応的である．

## 2．マッチング法則から確率ウェイト関数を導く

マッチング法則は，相対的反応率が累積報酬（強化子）に比例する現象である（Herrnstein et al.，2000）．動物実験から発見された規則性だが，人間を用いた実験でも検証され，行動経済分析に応用されている．マッチング法則は双曲時間割引率を導き，現在バイアスなどの時間選択のアノマリー(Lowenstein and Prelec，1991）を説明するための基礎と考えられる．

Baum(1974, 1979)による一般化マッチング法則から，2 代替案間の選択率は次のように予測される．

$$\begin{aligned}\text{Aの反応確率} &= \frac{\text{Aへの反応回数}}{\text{Aへの反応回数}+\text{Bへの反応回数}}\\ &= \frac{k\cdot\text{Aの累積報酬}^{\gamma}}{k\cdot\text{Aの累積報酬}^{\gamma}+\text{Bの累積報酬}^{\gamma}} \qquad (4)\\ &= \frac{1}{1+(\text{Bの累積報酬}/k\cdot\text{Aの累積報酬})^{\gamma}}\end{aligned}$$

式(4)を用いて確率ウェイト関数を近似すると図 1 右のようになる．

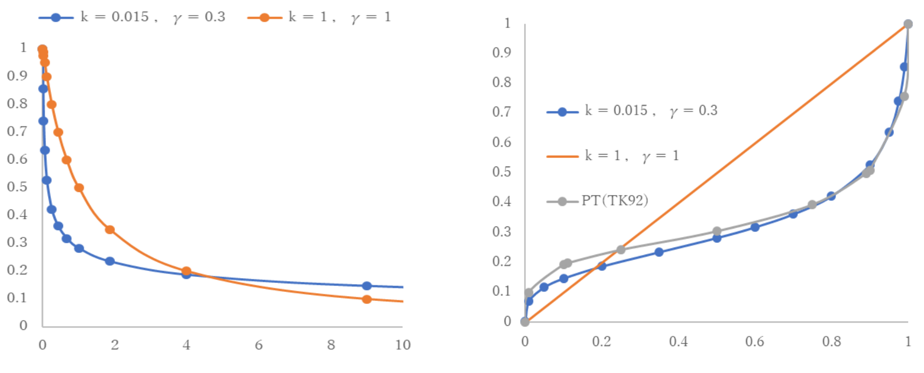


図 1　一般化マッチング法則の反応確率（図 1 左）と確率ウェイト関数の近似（図 1 右）

図 1 の確率ウェイト関数は，$\alpha$＝0．88，$\lambda$＝2．25の価値関数(1)の下で選択問題ペア1と2の典型的な選択パタンを両方予測できる（表 1 参照）．なおモデル計算，グラフ化，作表にはノートブック PC（Windows OS 64 bit）Microsoft Excel を用いた．

表 1  アレのパラドックスの予測（一般化マッチング法則）

| Allais paradox (common consequence effect) | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | | 0% | p-Weight | Value |
| Outcome 1 | 500 | 10% | 14.67% | 34.78814 |
| Outcome 2 | 100 | 89% | 38.13% | 21.94104 |
| Outcome 3 | 0 | 1% | 47.20% | 0 |
| | | | total | 56.72919 |
| B | | 0% | weight | Value |
| Outcome 1 | 100 | 100% | 100.00% | 57.54399 |
| | | | total | 57.54399 |
| C | | 0% | weight | Value |
| Outcome 1 | 500 | 10% | 14.67% | 34.78814 |
| Outcome 2 | 100 | 0% | 0.00% | 0 |
| Outcome 3 | 0 | 90% | 85.33% | 0 |
| | | | total | 34.78814 |
| D | | 0% | weight | Value |
| Outcome 1 | 100 | 11% | 15.14% | 6.329839 |
| Outcome 2 | 0 | 89% | 84.86% | 0 |
| | | | total | 6.329839 |

## ３．影の長さ

マッチング法則は双曲時間割引率の基礎でもある．双曲時間割引は報酬遅延 D に 1 を加えたものが割引因子となる．つまり距離 D に応じて見かけの大きさが変わる．子供と並んでいる大人は背が高いが，遠く離れると背丈の差は判然としなくなるのと似ている．実際の高さを 1 とすると，仰角 $\theta$ に対し $D = 1 / \tan\theta$ である．確率 p を $\theta = 0.5\pi p$ と変換して，$w(p) = (1 + K \cdot D^{\gamma})^{-1}$ ，K=1.3，$\gamma$=1.05，参照点 r ＝75 と置くと，図２のグラフのようになる．図１を見てわかるように，プロスペクト理論のように逆 S 字の確率ウェイト関数でアレの背理（選択問題ペア２）を予測するためのは，$\alpha$ が 0.3 程度の極端なバイアスを必要とする．ところが図２のそれは線形に近い．この w（p）を確率ウェイト関数の代わりに用いると，選択問題ペア１と２の典型的選択パタンを再現することができる（表 3 参照）．

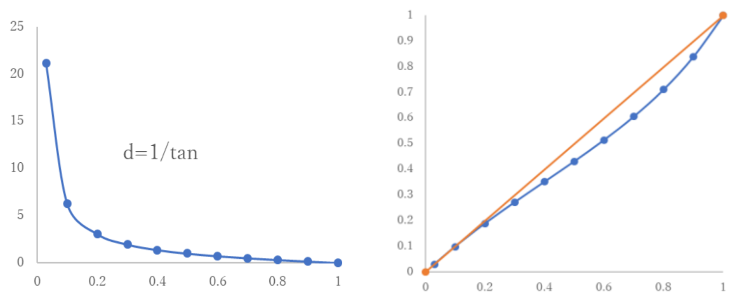


図２　双曲時間割引の一種（図２左）と確率ウェイト関数の近似（図２右）

表 2　アレのパラドックスの予測（双曲時間割引）

| *Allais paradox (common consequence effect)* | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **A** | | 0% | weight | value |
| Outcome 1 | 500 | 10% | 9.88% | 20.31651 |
| Outcome 2 | 100 | 89% | 74.13% | 12.59502 |
| Outcome 3 | 0 | 1% | 15.98% | -16.067 |
| | | | **total** | **16.8445** |
| **B** | | 0% | weight | value |
| Outcome 1 | 100 | 100% | 100.00% | 16.98976 |
| | | | **total** | **16.9898** |
| **C** | | 0% | weight | value |
| Outcome 1 | 500 | 10% | 9.88% | 20.31651 |
| Outcome 2 | 100 | 0% | 0.00% | 0 |
| Outcome 3 | 0 | 90% | 90.12% | -90.5828 |
| | | | **total** | **-70.266** |
| **D** | | 0% | weight | value |
| Outcome 1 | 100 | 11% | 10.83% | 1.868873 |
| Outcome 2 | 0 | 89% | 89.17% | -89.4595 |
| | | | **total** | **-87.591** |

## ４．まとめ

Kahneman と Tversky(1979)は，現実の人間の参照点依存選好をモデル化するプロスペクト理論を提案したが，予測力が参照点に依存しないという別のパラドックスが発生している．本研究では確率ウェイト関数を近似する代替的な方法として，マッチング法則，あるいは双曲時間割引から確率ウェイトを近似する方法でアレのオリジナルの問題組を予測できることを示し，また参照点のシフトに対して感応的であることを示した．この観察は体系だった厳密な理論や十分なデータを伴う実証的根拠に基づくわけではなく，偶然性の強いものである．したがって，本研究を通じて，じゅうらい提案されモデルの取捨選択にとどまらず，確率ウェイト関数の導出方法について，より体系だった研究の余地があることが示唆されたと考えられる．

## 引用文献

Allais, M., 1953. Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'école américaine. *Econometrica* 21, 503-546.

Baum, W. M., 1974. On two types of deviation from the matching law: bias and undermatching 1. Journal of the Experimental Analysis of Behavior 22(1), 231–242.

Baum, W. M., 1979. Matching, undermatching, and overmatching in studies of choice. Journal of the Experimental Analysis of Behavior 32, 269–281.

Brandstätter, E., G. Gigerenzer, and R. Hertwig, 2006. The priority heuristic: making choices without trade-offs. Psychological Review 113(2), 409.

犬童健良，2018a. 共通比効果と共通結果効果を共に予測するプロスペクト理論のシミュレーション研究，関東学園大学経済学紀要 44, 19-43. https://doi.org/10.20589/kantogakueneconomics.44.0_19

犬童健良, 2018b. プロスペクト理論のシミュレーション研究，行動経済学会第 12 回大会ポスター発表. http://www.abef.jp/conf/2018/common/doc/poster/G11_PR0021.pdf

大垣昌夫・田中沙織, 2018. 行動経済学入門, 有斐閣.

Herrnstein, R. J., D. I. Laibson, and H. Rachlin, 2000. The Matching Law: Papers in Psychology and Economics. Harvard University Press.

Loewenstein, G., and D. Prelec, D. 1992. Anomalies in intertemporal choice: Evidence and an interpretation. The Quarterly. Journal of Economics 107(2), 573–597.

Kahneman, D., and A. Tversky, 1979. Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica* 47, 263-291.

Prelec, D., 1998. The probability weighting function. Econometrica 66, 497–528.

Tversky, A., and D. Kahneman, 1992. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty* 5 (4), 297-323.