

# プロスペクト理論のシミュレーション研究

犬童健良<sup>a</sup>

## 要約

本論文では, Tversky と Kahneman の累積プロスペクト理論 CPT における参照点の移動を明示化したモデルを, Allais のパラドックスの例題に適用し, シミュレーション実験を通じて, 共通比効果 (CRE) と共通結果効果 (CCE) の両方のタイプの問題を予測できる CPT モデルが CPT で提案された実証的パラメータとは非常に異なる値となることを示す.

JEL 分類番号 : D81,D91

キーワード : 参照点依存, 共通比効果, 共通結果効果, Allais パラドックス, 累積プロスペクト理論, シミュレーション

---

<sup>a</sup> 関東学園大学経済学部 kindo@kanto-gakuen.ac.jp

## 1. イントロダクション

Kahneman and Tversky によって提案された Prospect Theory (PT) は、リスク下の決定における参照点に依存する選好を計量的にモデル化し、例えば Allais のパラドックスにおける期待効用最大化の仮定に違反する典型的な選択パターンを予測できるとされる。PT は典型的には逆 S 字型のグラフを持つ確率の単調非減少変換（確率加重関数）と典型的に参照点を原点として通る金額の単調非減少関数で参照点から上（利得）側が凹、参照点から下（損失）側が凸である。プロスペクト理論にはこれまでに指摘されていた問題点を改良した改良版も存在する。Tversky and Kahneman の累積プロスペクト理論(CPT)はくじを構成する可能な結果を任意子に拡張した。また PT では選好逆転現象を説明できないが、参照点としてくじの価格を導入した Schmidt, Starmer and Sugden の第 3 世代プロスペクト理論(3GPT)はこれを可能にした。参照点を内生的に説明できないという批判に対しては Köszegi and Rabin が確率的期待を用いた修正を提案している。しかしこれらについても批判は残されている。またこれらの改良理論はオリジナルの PT のもつ参照点依存選好のモデルとしてのすべての性質を継承しているわけではなく、期待効用理論の修正モデルとしての評価局面に集中し、認知的手続きモデルである編集局面はほぼ無視されている。

本論文では、犬童(2018)、Indo(2018)の行ったコンピュータ実験から概略を紹介し PT とその改良版の問題点を論じるとともに代替するモデル化の方法を示唆する。参照点の明示的シフトを組み入れた CPT モデルを用い、Allais の例題において共通比効果 (CRE) と共通結果効果 (CCE) の両方のタイプの問題を予測できるパラメータ範囲を特定し、Tversky and Kahneman で想定された実証的なパラメータ値との乖離を示す。これを通じて価格や確率的な参照点の特定方法を導入しても特定の問題において CPT の予測力は定性的に改善されないケースがあること、またそれゆえ PT の参照手に存モデルとしての重要な側面がモデル化できていない可能性を示唆する。

## 2. 累積プロスペクト理論

累積プロスペクト理論の価値関数と確率ウェイト関数は以下のように定義される。

$$v(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x \geq 0, \\ -\lambda(-x)^\beta, & x < 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$w^+(p) = \frac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{1/\gamma}}, \quad 0 < p < 1, \quad (2)$$

$$w^-(p) = \frac{p^\delta}{(p^\delta + (1-p)^\delta)^{1/\delta}}, 0 < p < 1.$$

累積プロスペクト理論の評価関数は次の形式で書くことができる.

$$V(f) = \sum_{i=-m}^0 \pi_i^- v(x_i) + \sum_{i=0}^n \pi_i^+ v(x_i) \quad (3)$$

式(3)中の $\pi_i^+$ ,  $\pi_i^-$ は決定ウェイト(decision weight)と呼ばれ, 確率加重関数 $w$ から次のように定義される.

$$\begin{aligned} \pi_i^+(p) &= w\left(\sum_{k=i}^n p_k\right) - w\left(\sum_{k=i+1}^n p_k\right), 0 \leq i < n-1, \pi_n^+(p) = w(p_n), \\ \pi_i^-(p) &= w\left(\sum_{k=-m}^i p_k\right) - w\left(\sum_{k=-m}^{i-1} p_k\right), 1-m \leq i < 0, \pi_m^-(p) = w(p_{-m}). \end{aligned} \quad (4)$$

実証データによる推定値は,  $\alpha = \beta = 0.88$ ,  $\lambda = 2.25$ ,  $\gamma = 0.61$ ,  $\delta = 0.69$ である.

## 2. Allais パラドックスとシミュレーション

Allais の示した例題には Allais 自身が名付けた確実性効果以外に次の 2 種類が含まれる. これらは後に共通比効果や共通結果効果とも呼ばれた. 共通比効果(CRE)は, 金額 $x > y > 0$ として,  $f_1 = (x, p; 0, 1-p) \preceq f_2 = (y, 1)$  (確実性効果)かつ  $f_3 = (x, \sigma p; 0, 1-\sigma p) = \sigma f_1 \succeq f_4 = (x, \sigma; 0, 1-\sigma) = \sigma f_2$  となる選好を示す.

例 1 (CRE の例題).  $x = 400, y = 300, p = 0.8, \sigma = 0.25$ .

共通結果効果 (CCE) は  $x > y > 0$ ,  $p, q, p+q \in [0,1]$  に対し,  $g_1 = (x, p; y, q; 0, 1-p-q) \preceq g_2 = (y, 1)$  (確実性効果)かつ  $g_3 = (x, p; 0, 1-p) \succeq g_4 = (y, 1-q; 0, q)$ .

例 2 (CCE の例題).  $x = 500, y = 100, p = 0.1, q = 0.89$ .

これらの例題について, 参照点のシフトを導入しない(元の)CPT モデルを計算し, パラメータ範囲をシミュレーション実験によって抽出した. 具体的には CPT モデルパラメータの範囲を  $0.05 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ ,  $\lambda = 1, 2, 3$ ,  $0.05 \leq \gamma \leq \delta \leq 1.5$ , 参照点シフト  $r = 0, 50, 100, \dots, 500, \dots$ と制約して CPT モデルの境界を求めた (Prolog プログラムを作成). パラメータ境界をモンテカルロ法によって抽出すると 図1と図2のような境界が得られる.

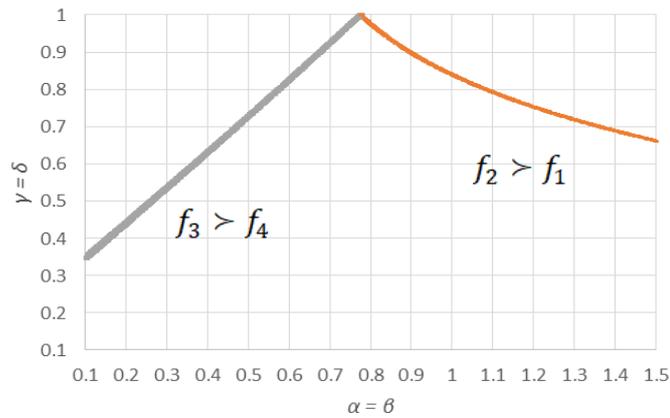


図1 共通比効果(CRE)のCPTモデル境界:参照点シフトなしの場合. 図出典:[CC BY-SA 4.0]

[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fig\\_2\\_Prediction\\_boundary\\_of\\_the\\_Allais\\_paradox.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fig_2_Prediction_boundary_of_the_Allais_paradox.png)

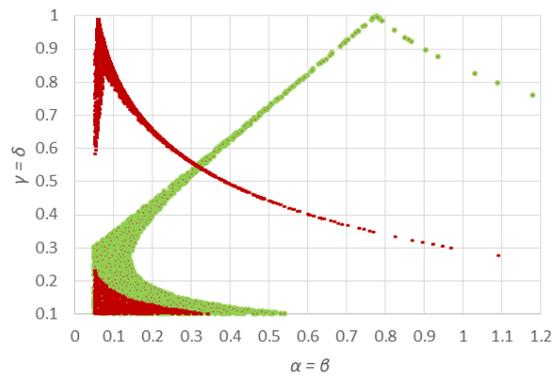


図2 参照点シフトなしCPTモデルの境界:差0.01以内,茶色はCCE,緑色はCRE. 図出典:[CC BY-SA 4.0] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fig\\_3\\_CPT\\_prediction\\_boundary\\_of\\_the\\_CCE\\_example.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fig_3_CPT_prediction_boundary_of_the_CCE_example.png)

### 3. 参照点シフト付きCPTモデルとそのシミュレーション実験

確実な結果の $f_2$ を除くと,参照点 $r$ に依存した各プロスペクトの評価値は以下のようになる.

$$\begin{cases} V(f_1|r \leq 0) = w^+(0.8)v(400-r) + (1-w^+(0.8))v(-r) \\ V(f_1|400 \geq r > 0) = w^+(0.8)v(400-r) + w^-(0.2)v(-r) \\ V(f_1|r > 400) = (1-w^-(0.2))v(400-r) + w^-(0.2)v(-r) \end{cases}, \quad (5)$$

$$\begin{cases} V(f_3|r \leq 0) = w^+(0.2)v(400 - r) + (1 - w^+(0.2))v(-r) \\ V(f_3|400 \geq r > 0) = w^+(0.2)v(400 - r) + w^-(0.8)v(-r) , \\ V(f_3|r > 400) = (1 - w^-(0.8))v(400 - r) + w^-(0.8)v(-r) \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} V(f_4|r \leq 0) = w^+(0.25)v(300 - r) + (1 - w^+(0.25))v(-r) \\ V(f_4|300 \geq r > 0) = w^+(0.25)v(300 - r) + w^-(0.75)v(-r) , \\ V(f_4|r > 300) = (1 - w^-(0.75))v(300 - r) + w^-(0.75)v(-r) \end{cases} \quad (7)$$

シミュレーション実験によって抽出した参照点シフト導入後の CPT モデルのパラメータ範囲の境界部分のグラフは図 3 と図 4 のように描かれる。

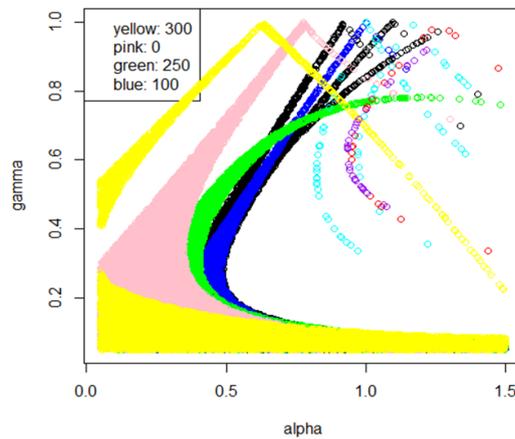


図 3 参照点シフトによる CRE の予測モデル: CPT パラメータ境界部分の差 0.1 以内. 図出典:[CC BY-SA 4.0] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fig.4\\_Prediction\\_boundaries\\_of\\_the\\_CE\\_and\\_CRE\\_with\\_shifting\\_reference\\_point.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fig.4_Prediction_boundaries_of_the_CE_and_CRE_with_shifting_reference_point.png)

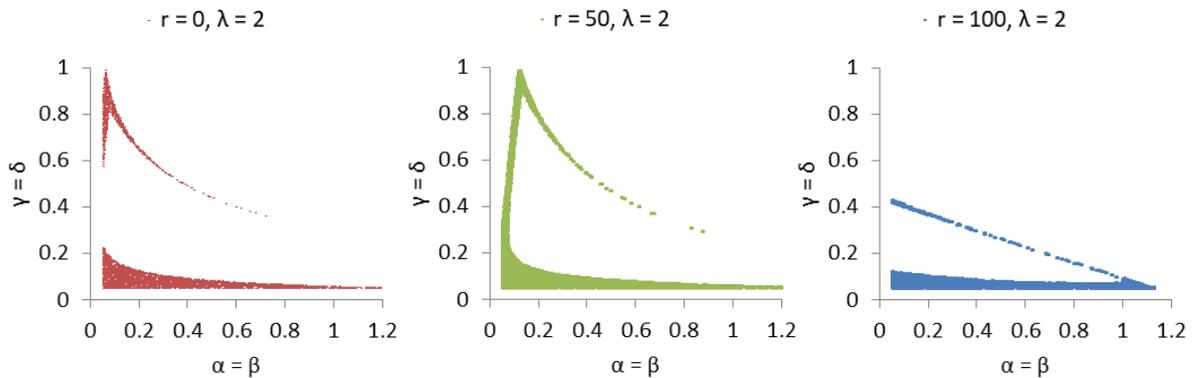


図 4 参照点シフト付 CPT による CCE モデル境界. 図出典:筆者によって作成 [CC BY-SA 4.0]

[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fig.5\\_Prediction\\_boundary\\_of\\_the\\_CE\\_and\\_CCE.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fig.5_Prediction_boundary_of_the_CE_and_CCE.png)

最後に参照点を確率的に動かし、損失回避係数を同時に変化させた(図 5)。

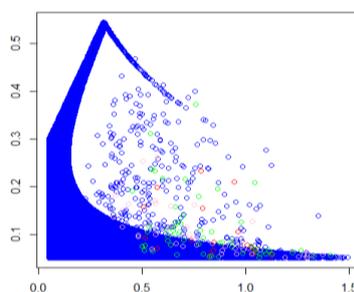


図 5 確率的参照点の下での CPT:  $\alpha < \beta$ ,  $\gamma < \delta$ ,  $\lambda = 1, 2, 3$ ,  $r = 0, 50, 100$ . 図出典: [CC BY-SA

4.0] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fig. 8\\_Stochastic\\_reference\\_point\\_and\\_the\\_prediction\\_boundary\\_of\\_asymmetric\\_CPT.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fig. 8_Stochastic_reference_point_and_the_prediction_boundary_of_asymmetric_CPT.png)

#### 4. まとめ

本論文では累積プロスペクト理論における参照点のシフトを明確にモデル化し、コンピュータシミュレーション実験を用いてアレの背理を予測するためのパラメータと参照点の関係を考察した。それにより、Tversky and Kahneman の実証パラメータでは Allais の 2 つの例題に対する現実の人々の典型的選択パターンを同時に予測することが困難であることが示された。またリスクや確率の歪みのパラメータを不自然でない範囲に制約するかぎり、CRE と CCE を CPT の同一参照点シフト、あるいはその参照点をランダムに生成することによっても、やはり予測のむずかしさは変わらないことが分かった。

#### 引用文献

Allais, M. (1953). Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'école américaine. *Econometrica*, 21, 503–546.

犬童健良(2018). 共通比効果と共通結果効果を共に予測するプロスペクト理論のシミュレーション研究, 関東学園大学経済学紀要, 44, 19-43.

Kahneman, D., and Tversky, A. (1979). Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*, 47, 263–291.

Kőszegi, B. and M. Rabin, (2006). A model of reference-dependent preferences, *Quarterly Journal of Economics*, 121: 1133–1165.

Schmidt, U., Starmer, C., and Sugden, R. (2008). Third-generation prospect theory. *Journal of Risk and Uncertainty*, 36(3), 203–223.

Tversky, A., and Kahneman, D. (1992). Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty*, 5 (4), 297–323.