

意思決定における非合理性の量子意思決定モデルによる研究

金城 卓司^a 高橋 泰城^b

要約

この10年間ほど、量子論の数学を用いて意思決定現象を説明する量子意思決定理論が注目を集めている。量子意思決定理論は、コルモゴロフ確率論を用いて記述できない人間の意思決定や認知課題、またその他の生物や社会科学のデータにおけるさまざまなアノマリーを記述するのに有力な理論であることが示されているが (Ashtiani and Azgomi, 2015), 本論文では、不確実性下での意思決定の基本原則である *sure-thing principle* (STP) とコルモゴロフ確率論の基本定理である全確率の法則 (*law of total probability*; LTP) について概説した後、それらの破れを記述するのに量子論における干渉効果が有効であることを示す。また、量子意思決定理論の新たなモデルとして、量子論の公理の一つであるボルンの確率規則を一般化した一般化ボルンの確率規則に基づく拡張モデルを提唱し、適当な設定において拡張モデルが、既存の標準的なモデル (e.g. Busemeyer et al., 2006) では捉えられない干渉効果を捉えられることを示す。最後に拡張モデルをはじめ量子意思決定モデルに残された問題点と今後の展望について記す。

JEL 分類番号： C6, D8,

キーワード： 不確実性下での意思決定, *sure-thing principle* (STP), 全確率の法則 (LTP), 量子意思決定

^a 北海道大学大学院文学研究科 takujisince1987@gmail.com

^b 北海道大学大学院文学研究科, 北海道大学社会科学実験研究センター
taikitakahashi@gmail.com

1. イントロダクション

1.1. 不確実性下での合理的な意思決定

人々は日常的に、どこのレストランに入るか、どちらの道を選んで目的地まで行くかなど複数の選択肢から一つを選ぶ意思決定場面に直面している。例えば、「確実に 10 万円がもらえる」くじ A と「10%の確率で 50 万円がもらえる」くじ B があるとき、どのような意思決定をするのが合理的だろうか。期待効用理論によれば、合理的な意思決定者は期待効用（確率と効用の積）が最大になるような意思決定を行う(von Neumann and Morgenstern, 1947). したがって、この例の場合は、 $u(10 \text{ 万円}) > 0.1u(50 \text{ 万円})$ を満たしていれば、くじ A を選ぶ方が合理的であると見なされる（ただし、 $u(\cdot)$ は効用関数である）。しかし日常では、このくじの例のように、ある結果が生じる客観確率が既知ということは滅多になく、むしろ、客観確率が未知の不確実性下で意思決定を行うことがほとんどである。そのような不確実性下での意思決定では、客観確率の代わりに事象が発生する見込み＝主観確率を用いて、主観的期待効用が最大になるような意思決定が合理的な意思決定であると考えられ、この意思決定を扱う理論を、SEU（主観的期待効用理論 subjective expected utility theory）と呼ぶ (Savage, 1954).

1.2. STP およびその破れ

Shafir and Tversky (1992) によれば、不確実性下での意思決定では、記述理論でも規範理論でもほとんどの意思決定理論が帰結に至るまでの経路は無視し、意思決定を帰結のみによって評価する立場＝帰結主義である。帰結主義者は、帰結がまだ得られていない場合は、潜在的な帰結とそれが実現する見込み＝主観確率の両方を考え、それらの積である主観的期待効用が最大になるような意思決定を行う。また、帰結主義にもとづく意思決定は、sure-thing principle（当然原理；以後 STP と略）と呼ばれる基本原理を満たすべきことが知られている(Savage, 1954).

STP とは、「互いに排反な 2 つの選択肢(x, y)があるとき、もし意思決定者が、任意の事象 A が起こる場合に y より x を選好し、かつ、A が起こらない場合にも y より x を選好するならば、A が起こるかどうかわからない場合にも、 y より x を選好すべきである」という規範原理である。具体例を挙げて STP およびその破れについて説明する。Tversky and Shafir (1992) の実験では、学生は、試験を受けた後にハワイ行きの格安チケットを購入しハワイへ行くかどうかを次の 3 つの条件の下で尋ねられる。(i)試験の結果が合格とわかっているとき、(ii)試験の結果が不合格とわかっているとき、(iii)試験の結果がわからないとき。STP によれば、条件(i)で「ハワイへ行く」と答え、かつ、条件(ii)でも「ハワイへ行く」と答える学生がいれば、その学生は条件(iii)の場合にもハワイへ行くと答えるべきである。しかし、実際には、条件(i)と条件(ii)で「ハワイへ行く」と答えたにも関わらず、条件(iii)では「ハワイへ行く」と答えなかった学生が過半数もいた。つまり、これらの学生たちの行った意思決定は、STP を破る非合理的な意思決定である。

1.3. LTP と STP

STP の破れは、意思決定の規範原理からの逸脱というだけでなく、現代数学を基礎付けるコルモゴロフ確率論からの逸脱をも意味しており、このような逸脱が実験データとして得られた場合には、その取扱いに通常の統計学を用いることが正当化されない可能性があるという重要な問題を提起する。コルモゴロフ確率論は(コルモゴロフ, 2010), 確率が満たすべき性質について規定した公理的確率論で、自然科学のみならず社会科学においても統計分析の基礎となる重要な理論である。

いま標本空間 Ω が互いに排反な n 個の事象の和で書ける (i.e. $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$) とする。このとき、任意の事象 B が起こる確率は次式で与えられる。

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i), \quad (1)$$

これを全確率の定理や全確率の法則(Law of total probability; 以後 LTP と略す)と呼ぶ。確率論の「言葉」を使えば, STP の破れが LTP の破れの特殊な場合になっていることがわかる。いま, 互いに排反な 2 つの事象 A_0 と A_1 がある場合を考える(「ハワイ問題」の場合は, A_0 を「試験に合格する」という事象, A_1 を「試験に合格しない」という事象とそれぞれ考えればよい)。すると, 任意の事象 B (「ハワイ問題」の場合は, 「ハワイへ行く」という事象に対応) が起こる確率 $P(B)$ は LTP を用いて

$$P(B) = P(B|A_0)P(A_0) + P(B|A_1)P(A_1), \quad (2)$$

と書ける。ところ, STP の前提部分「事象 A_0 が起きた場合に事象 B が起こり, かつ, 事象 A_1 が起きた場合にも事象 B が起こる」を数式で表すと,

$$P(B|A_0) = 1 \quad \text{かつ} \quad P(B|A_1) = 1, \quad (3)$$

という条件付確率で表される。この式を式(2)に代入すると,

$$P(B) = P(A_0) + P(A_1) = 1, \quad (4)$$

となり, STP の結論部分「 A_0 と A_1 のどちらが起こるか不明の場合にも, 確実に事象 B が起こる (意思決定者は確実に「ハワイへ行く」を選ぶ) べきである」が導き出される。したがって, STP が破れることは式(2)が成立しないことを意味するので, これは LTP の破れ:

$$P(B) \neq P(B|A_0)P(A_0) + P(B|A_1)P(A_1), \quad (5)$$

でもある。このような STP の破れ, あるいはそれを一般化した LTP の破れの事例は意思決定課題(e.g. Croson, 1999)のほかに, 認知課題(e.g. Kahnemann and Tversky, 1972), ヒト以外の生物 (e.g. Asano et al., 2012) や社会科学のデータ(Haven and Khrennikov, 2013) においても見られる事が知られている。2.2 章で述べる量子意思決定理論は, これらのアノマリーを一括して公理的に記述することができる理論として, 近年広く注目を集めている。

2. 量子意思決定理論のモデル

2.1. STP の破れの説明を試みた代表的な仮説と理論

STP を破る意思決定の非合理性に対して、これまでいくつかの仮説や理論が提唱されてきた。Shafir and Tversky (1992) の reason-based choice (仮説) では「人びとは理由に基づいて合理的に意思決定を行っており、理由がない場合の意思決定は必ずしも合理的ではない」と考える。「ハワイ問題」では「試験が合格の場合はご褒美としてハワイへ行く理由があり、また不合格の場合は慰労としてハワイへ行く理由があるが、合否が不明の場合はハワイへ行く理由がない」として、その理由なき意思決定に合理性がないことを擁護する。しかし、reason-based choice は意思決定者の心理に原因を求めているために公理論化するのが非常に困難であるという弱点がある。さらに、理由を持ち得ない場合の LTP の破れ(e.g. Asano et al., 2012) をこの説によって説明することはできない。また確率の公理を書き換えたサポート理論(Tversky and Koehler, 1994)やプロスペクト理論(Kahnemann and Tversky, 1979; Tversky and Kahnemann, 1992)を用いても、条件なし確率が条件付確率同士の外分点になる場合(Li et al., 2010)は、被験者にとっての試験に合格する (または不合格となる) 主観確率が負の実数となってしまうため、非負実数値をとる確率のみを扱う (コルモゴロフ確率論や) プロスペクト理論の枠内ではこのような確率的な変数を取り扱うことができない。したがって、従来、成功を収めた行動経済学の理論の一つであるプロスペクト理論も STP の破れを説明できない。

2.2. 量子意思決定理論の主要概念

量子論における数学、とりわけ量子確率によって STP の破れをはじめとした意思決定・認知アノマリーを記述するのに有効な理論として、量子意思決定理論がこの 10 年間程度、注目を集めている(Busemeyer et al., 2006; Ashtiani and Azgomi, 2015)。この理論的アプローチにおいては、負の確率変数を必ずしも登場させる必要はない。

量子論は公理論的理論であり、いくつかの公理 (要請) があるが (量子論については、成書 (e.g. 清水, 2010) を参照されたい) , そのうちの 1 つに「量子論では、(量子系の) 状態はある複素ヒルベルト空間 H の複素ベクトル (に位相因子をかけた斜線) として表される」という公理がある。例えば、「ハワイ問題」において「試験に合格する」という状態は $|A\rangle = (1, 0)^t$ のように表される (ただし、 t はベクトルの転置を表す)。また別の公理として、「量子論における確率は、(量子) 状態を固有空間へ射影 (という操作を) して得られたノルム (長さ) の 2 乗によって与えられる」と要請するボルンの確率規則;

$$P(a|A) = \|\hat{P}(a)|A\rangle\|^2, \quad (6)$$

がある (ここに、 a は固有値、 $\hat{P}(a)$ は $|A\rangle$ を a の属する固有空間へ射影する演算子である)。この確率は、ハワイ問題の場合は、試験に合格するという状態が実現する場合に a という値をとる (ハワイへ行くという選択をする) 条件付確率である。ここで注目すべきは、指数の 2 が理論的に決まったものではなく、これまで知られている量子現象をうまく説明できるということで経験的に (公理として) 要請されたものであるということである。さらに、

量子論では状態は「重ね合わせの原理」によって、元の状態とは別の「重ね合わせ状態」を実現することができる。例えば、「試験に合格する」という状態 $|A\rangle = (1, 0)^t$ と「試験に合格しない」という状態 $|B\rangle = (0, 1)^t$ を重ね合わせた状態；

$$|AB\rangle = c_1|A\rangle + c_2|B\rangle \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{C}), \quad (7)$$

が実現する（ここに、 c_1, c_2 は複素数で、 $|c_1|^2, |c_2|^2$ はそれぞれ状態 $|A\rangle, |B\rangle$ が実現する見込みの確率=主観確率に対応する）。

2.3. 干渉効果と LTP の破れ

重ね合わせ状態とボルンの確率規則によって、量子論の特徴の一つである「干渉効果」という現象が生じる。式(7)を式(6)に代入し、 $|c_1|^2, |c_2|^2$ を（それぞれ状態 $|A\rangle, |B\rangle$ が実現する見込みの確率に対応しているので） $P(A), P(B)$ と書くと

$$P(a) = P(a|A)P(A) + P(a|B)P(B) + 2\sqrt{P(A)P(B)P(a|A)P(a|B)}\cos\theta, \quad (8)$$

となり、右辺の第三項に LTP（式(2)）にはなかった「干渉項」が出てくる（ただし、 θ は位相因子）。そして、干渉項 $\neq 0$ のときに干渉効果が生じたと言う。量子意思決定理論では、LTP の破れの大きさは干渉項によって表現される（破れが生じていない場合は干渉項 = 0である）。干渉項を I 、4つの確率の積 $P(A)P(B)P(a|A)P(a|B)$ を Π と書き、干渉効果係数として λ を $\lambda = I/2\sqrt{\Pi}$ と定義すると、標準的な量子論においては $(-1 \leq \cos\theta \leq 1 (\theta \in \mathbf{R}))$ から)

$$-1 \leq \lambda \leq 1, \quad (9)$$

である。

3. 拡張モデル

3.1. 一般化ボルンの確率規則とモデルの拡張

標準的な量子論に基づいた量子意思決定理論のモデルでは、(9)で示したように記述できる干渉効果の大きさに制限がある。しかし、実験データの中にはこの範囲に収まらないデータが存在することがわかっている(Khrennikov, 2010)。このようなデータをも記述できるモデルはいくつか提唱されているが(Khrennikov, 2010; Cheon and Takahashi, 2010)、本研究ではボルンの確率規則を一般化した拡張モデルによって記述できる干渉効果の範囲を広げることを試みた。

上述のように、ボルンの確率規則の指数は理論による要請で決まっているわけではない。そこで本研究では、主観確率のような心理量を測定するときも物理量を測定するときと同様に、心理量が（指数が2である）ボルンの確率規則に従っている保証はない（実際に通常のボルンの確率規則を用いては記述できないデータがある）という立場で、指数を2から正の実数 α に変更することで、通常のボルンの確率規則を次の「一般化ボルンの確率規則」に拡張する：

$$P(a|A) = \|\hat{P}(a|A)\|^\alpha, \quad (10)$$

なお、人間の意思決定が量子論の数学によって記述できるということは、意思決定に際して、人間の体内（e.g. 神経細胞）で何かしらの量子現象が生じていることを必ずしも意味しない。本研究では他の量子意思決定理論と同様に、「量子」という言葉を、あくまでも量子論の数学を用いて記述することができるという意味で使用している。

3.2. 拡張モデルの干渉効果

一般化ボルンの確率規則から干渉項を導くと、

$$I_\gamma = P(a) - X = (X + Y)^\gamma - X, \quad (11)$$

となる。ただし、 $X = |c_1|^2 \langle A | \hat{P}(a) | B \rangle + |c_2|^2 \langle A | \hat{P}(a) | B \rangle$ 、 $Y = 2\sqrt{\pi} \cos\theta$ である。得られた干渉項 I_γ を、従来のボルンの確率規則から得られる干渉項と比較する。 I_γ を γ で微分すると、

$$\frac{d}{d\gamma} I_\gamma = (X + Y)^\gamma \ln(X + Y), \quad (12)$$

であり、また $-1 \leq X \leq 1, -1 \leq Y \leq 1, X + Y < e$ が成立することがかんたんな計算によりわかるので、 $dI_\gamma/d\gamma < 0$ となり、 I_γ は γ の減少関数となることがわかる。よって、 $0 \leq \gamma \leq 1$ の範囲で、

$$I_\gamma \geq I, \quad (13)$$

が成立する（等号成立は $\gamma = 1$ のとき）。つまり、拡張モデルでは、適当な $\gamma < 1$ を選ぶことで、通常のボルンの確率規則に基づいたモデルでは記述できない大きな干渉項も記述することができるということである。

4. まとめと今後の展開

不確実性下での意思決定において、基本的な規範原理である STP を破るような非合理的な意思決定に関する研究が、Shafir and Tversky (1992), Tversky and Shafir (1992) を皮切りに注目を浴び、その非合理性を説明するための理論がいくつか提唱されてきたことを概観した。また、STP の破れは、コルモゴロフ確率論の基本定理である LTP の破れの特殊な場合であるため、広く LTP の破れという非合理性を研究することは、意思決定アノマリーのみならず、ヒト以外の生物や社会科学のデータにおいても見られるアノマリーを説明するためにも大きな意義があることを述べた。LTP の破れを説明するのに有効な理論として、量子意思決定理論が近年注目を集めているが、あらゆる LTP の破れデータを記述するためのモデルの決定版はいまだに提出されていない。

そこで本研究では、量子論の公理の一つであるボルンの確率規則を一般化することで標準的なモデルを拡張し、LTP の破れを記述できる範囲の拡張を試みた。拡張モデルは、指数に適当な実数を選ぶことで標準的なモデルでは記述できない大きな干渉項のデータも記述できることを示した。ただし、拡張モデルには問題がいくつか残されている。まず一つ目は、拡張モデルは（他の多くの既存モデルと同様）、まだ予測力の検証が行われていない。つま

り、適切なパラメータを設定することでデータを記述できるとしても、それと同じ設定で他のデータを予測できる保証がない。二つ目は、これまた他の量子意思決定理論のモデルに共通して言えることだが、モデルを担う実体がいまだに不明であるといこうとである。今後は、実体とモデルとを橋渡しする知見（e.g. ニューロン集団の情報コーディングが非線形であれば、干渉効果が生じることがわかっている (Takahashi and Cheon, 2012)）を重ねて、現象論レベルの理論から実体論レベルの理論へと発展させる研究が待たれる。

引用文献

(論文の場合)

Asano, M., Basieva, I., Khrennikov, A., Ohya, M., Tanaka, Y. and Yamato, I., 2012.

Quantum-like model for the adaptive dynamics of the genetic regulation of *E. coli*'s metabolism of glucose/lactose. *Systems and Synthetic Biology*, Vol 6, 1, pp1-7

Ashtiani, M. and Azgomi, M.A., 2015. A survey of quantum-like approaches to decision making and cognition. *Mathematical Social Science* 75, pp49-80

Busemeyer, J.R., Matthews, M., and Wang, Z., 2006. A quantum information processing explanation of disjunction effects. In: *Proceedings of the 29th Annual Conference of the Cognitive Science Society and the 5th International Conference of Cognitive Science*, pp131-135.

Cheon, T. and Takahashi, T., 2012. Quantum phenomenology of conjunction fallacy. *Journal of the Physical Society of Japan*. 81(10).104801

Croson, R., 1999. The disjunction effect and reason-based choice in games.

Organizational Behavior and Human Decision Processes. 80(2), pp118-133.

Haven, E. and Khrennikov, A., 2013. *Quantum Social Science*. Cambridge University Press.

Kahneman, D., Tversky, A., 1972. Subjective probability: a judgment of representativeness. *Cognitive Psychology* 3. pp430-454

Kahneman, D. and Tversky, A., 1979. Prospect theory: an analysis of decision under risk. *Econometrica* 47(2) pp263–291.

Khrennikov, A.Y., 2010. *Ubiquitous Quantum Structure: from Psychology to Finance*. Springer.

Kolmogorov, A., 1933. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Springer (坂本 實訳(2010) 確率論の基礎概念. ちくま学芸文庫)

Li, S., Wang, Z.J., Rao, L.L. and Li, Y.M., 2010. Is there a violation of Savage's sure-thing principle in the prisoner's dilemma game? *Adaptive Behavior*. Vol.18, 3-4, pp377-385

- Savage, L.J., 1954. The Foundations of Statistics. John Willey & Sons.
- 清水明, 2006. 量子論の基礎. サイエンス社, 第4版
- Takahashi, T. and Cheon, T., 2012. A nonlinear neural population coding theory of quantum cognition and decision making. World Journal of Neuroscience. 2, pp183-186
- Tversky, A. and Shafir, E., 1992. The disjunction effect in choice under uncertainty. Psychological Science. 3, pp305–309.
- Tversky, A. and Kahneman, D., 1992. Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainty. Journal of Risk and Uncertainty. 5, pp297-323
- Tversky, A. and Koehler, D.J., 1994. Support theory: a nonextensional representation of subjective probability. Psychological Review. 101,4, pp547-567.
- Tversky, A. and Shafir, E., 1992. The disjunction effect in choice under uncertainty. Psychological Science. 3, pp305–309.
- von Neumann, J. and Morgenstern, O., 1947. Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press