

蟻とトレーダーとファットテイル

— Kirman(1993) モデルの応用 —

佐野 一 雄*

要約 アリの巣の近くに同じ条件で二つの砂糖の山をおくと、アリはどのように群がるだろうか？ Kirman(1993) はアリの社会的な集団現象のプロセスを簡単なモデルで説明し、興味深いシミュレーションを行った。証券市場におけるファットテイル現象はよく知られているが、その原因はまだ十分に解明されていない。Nirei and Watanabe(2014) が、やはり Kirman(1993) の延長線上に、ファットテイル現象のミクロ経済学的な基礎づけを試みているものの、MLRP、リスクニュートラル、右上がりの需要曲線、自動的な供給など、モデルに不可欠な強い仮定が多く、その理論構造はきわめて複雑である。本稿では、単純な証券市場のモデルを設定し、Kirman(1993) のモデルを応用することで、価格変化に見られるファットテイルを再現する。Kirman(1993) および Nirei and Watanabe(2014) と同様に、Keynes(1936) の美人投票モデルを念頭に、経済主体の独立性と相互依存性のバランスがファットテイルの原因であることを示す。

JEL 分類 C00, E00, G02

キーワード Security Market, Fat Tails, Beauty Contest, Social Interaction, Ants

1 はじめに

アリの巣の近くに同じ条件で二つの砂糖の山をおくと、アリはどのように群がるだろうか？アリは二つの砂糖の山に均等には群がらず、大きな偏りが生じることが実験で知られている。最初に砂糖を見つけたアリが仲間を誘い、それが連鎖するので、この偏りが生じると生物学者は考えている。経済学者ならば、偏った結果を見て、アリにとって二つの砂糖の山が無差別ではなかったのではないかと推論するだろう。しかし、砂糖の山が完全に無差別であっても、この偏りが生じるのである。Kirman(1993) はこの社会的な集団現象のプロセスを簡単なモデルで説明し、興味深いシミュレーションを行った。

証券市場におけるファットテイル現象はよく知られているが、その原因はまだ十分に解明されていない。現実的には、呼値のスプレッド間を繰り返し往復する大多数の

小さな値動きが、価格変化分布の平均と分散を小さくするので、結果としてファットテイルが現れるのだが、ミクロ経済学または行動経済学による理論的な説明は十分になされていない。Nirei and Watanabe(2014) が、やはり Kirman(1993) の延長線上に、ファットテイル現象のミクロ経済学的な基礎づけを試みているものの、MLRP、リスクニュートラル、右上がりの需要曲線、自動的な供給など、モデルに不可欠な強い仮定が多く、その理論構造はきわめて複雑である。

本稿では、単純な証券市場のモデルを設定し、Kirman(1993) のモデルを応用することで、証券市場においてトレーダーがロングからニュートラルに転じ、またニュートラルからロングに転じる確率モデルとそのマルコフ連鎖のシミュレーションを行い、価格変化に見られるファットテイルを再現する。Kirman(1993) および Nirei and Watanabe(2014) と同様に、Keynes(1936) の美人投票モデルを念

*福井県立大学経済学部 sano@fpu.ac.jp

頭に、経済主体の独立性と相互依存性のバランスがファットテイルの原因であることを示す。

2 証券市場

最初に N 枚の証券を $2N$ 人のトレーダーが取引する、単純化した証券市場を想定する。各トレーダーは証券を1枚だけ保有することができる。証券を保有しているトレーダーはトレーディングボードの売り方に、また保有していないトレーダーは買い方に、それぞれ N 人が呼値の順番に並んでいる。この順番のどこにいても、トレーダーは売りたいときに最も高い買い呼値で売り、買いたいときに最も安い売り呼値で買うことができる。価格は任意の呼値であらわされ、同時に発注された場合には、何らかの方法で配分されるものとする。このモデルは単純ではあるが、現実の証券市場のある重要な性質を表現している。すなわち、証券を買えば売り方に転じ、売れば買い方に転じるという、主体均衡にあるトレーダーの相転移である。本稿の最も重要な貢献は、この単純な証券市場の描像にある。この証券市場における取引の過程を $N = 3$ として図示する。

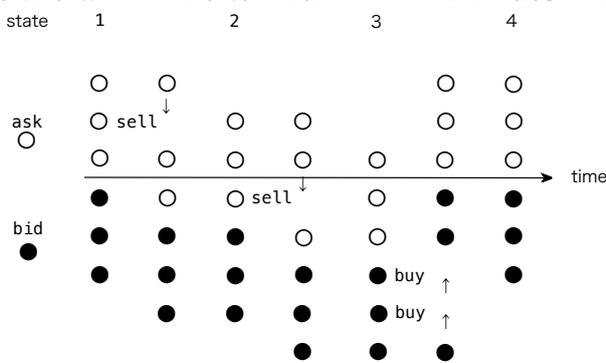


図1. 単純な証券市場と取引のプロセス

3 Kirman(1993) モデル

この単純な証券市場に Kirman(1993) のモデルを応用する。Kirman(1993) にしたがって、トレーダーは互いに独立に小さな確率 ϵ でロングまたはニュートラルに転じると仮定し、 $N \rightarrow \infty$ のとき $\epsilon \rightarrow 0$ とする。最初の一人がニュートラルからロングに転じる確率を $P(0, 1)$ 、その一

人がニュートラルに戻る確率を $P(1, 0)$ とすると

$$P(0, 1) = P(1, 0) = \epsilon \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

である。最初の一人がニュートラルからロングに転じたとき、次の一人がつられてロングに転じる確率 $P(1, 2)$ を

$$P(1, 2) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(\epsilon + (1 - \delta) \frac{1}{N-1}\right)$$

ただし、 $0 \leq \delta \leq 1$ とおく。また、ニュートラルに戻る確率も対称的であると仮定し、ロングが一人増加する確率を p_1 、ロングが一人減少する確率を p_2 とすると

$$\begin{aligned} p_1 &= P(k, k+1) \\ &= \left(1 - \frac{k}{N}\right) \left(\epsilon + (1 - \delta) \frac{k}{N-1}\right) \\ p_2 &= P(k, k-1) \\ &= \frac{k}{N} \left(\epsilon + (1 - \delta) \frac{N-k}{N-1}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

である。ただし、 $p_1 + p_2 \leq 1$ 、確率 $p_3 = 1 - p_1 - p_2$ でロングの人数 k は変わらないとする。

ここで、次の期待値を導入する。

$$\mu(k) = \sum_{l=0}^N \mu(l) P(l, k) \quad (2)$$

ただし、 $\mu(k)$ は k に滞在する相対時間

$$\mu(k) = \frac{\mu(k)}{\sum_{l=0}^N \mu(l)}$$

である。ロングの増減は対称的なので

$$\mu(k) P(k, l) = \mu(l) P(l, k) \quad (3)$$

であることに注意する。

相対時間 $\mu(k)$ を次のように変形する。

$$\mu(k) = \frac{\frac{\mu(1)}{\mu(0)} \dots \frac{\mu(k)}{\mu(k-1)}}{1 + \sum_{l=1}^N \frac{\mu(1)}{\mu(0)} \dots \frac{\mu(l)}{\mu(l-1)}} \quad (4)$$

(3) より

$$\begin{aligned} \frac{\mu(k+1)}{\mu(k)} &= \frac{P(k, k+1)}{P(k+1, k)} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{k}{N}\right) \left(\epsilon + (1 - \delta) \frac{k}{N-1}\right)}{\frac{k+1}{N} \left(\epsilon + (1 - \delta) \frac{N-(k+1)}{N-1}\right)} \end{aligned} \quad (5)$$

を (4) に代入すれば、相対時間 $\mu(k)$ を計算できる。状態 k と状態 $k+1$ の相対時間の比率 (5) は、ロングのトレー

ダー数 k の推移プロセスを表現し, $\epsilon = (1 - \delta)/(N - 1)$ で常に 1 であり, この一様分布を基準としてモデルの特性が分かれる¹.

4 シミュレーション

この確率モデルとそのマルコフ連鎖のシミュレーションを行うと, パラメータの設定しだいで, 価格変化に見られるファットテイルを再現することができる. シミュレーションで得られた毎 20 取引の価格変化を図示する. これらのシミュレーション結果から, パラメータの比率が等しくても, 絶対値によってモデルの特性は異なることがわかる. 興味深いことに, 相対時間の分布が一様であっても, ファットテイルが現れることを, シミュレーション結果は示している. 相対時間の分布が中心に集中すると, 価格は自然なホワイトノイズとなり, 両極端に分布するほどテイルが厚くなることは, 直感的に明らかである.

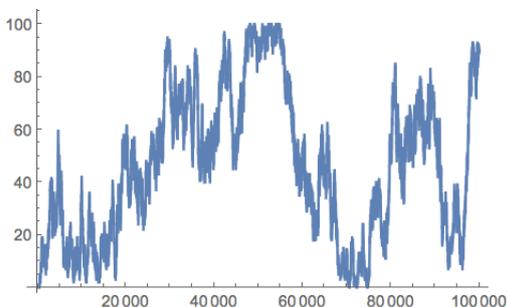


図 2. Buy, $\delta = 0.02, \epsilon = (1 - \delta)/(N - 1)$

¹トレーダー集団のサイズを大きくして, $N \rightarrow \infty, \epsilon = \alpha/N, \delta = 2\alpha/N$ とすると, $\mu(k)$ を対称ベータ分布の密度関数

$$f(x) = cx^{\alpha-1}(1-x)^{\alpha-1}, \quad x \in [0, 1]$$

で近似できる. 密度関数の形状は, Kirman(1993) モデルと同様に, 一様分布で分かれる.

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} N \frac{\mu(k+1) - \mu(k)}{\mu(k)} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f(k/N + 1/N) - f(k/N)}{\frac{1}{N} f(k/N)} \\ &= \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{(\alpha-1)(1-2x)}{x(1-x)} \end{aligned}$$

Kirman (1993), p.146 を参照.

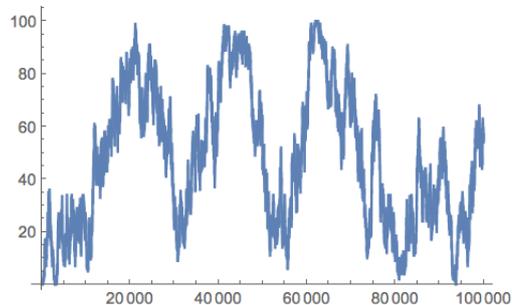


図 3. Sell, $\delta = 0.02, \epsilon = (1 - \delta)/(N - 1)$

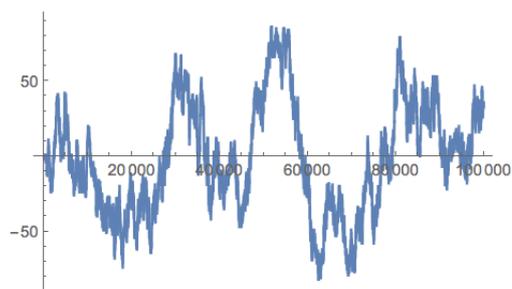


図 4. Price, $\delta = 0.02, \epsilon = (1 - \delta)/(N - 1)$

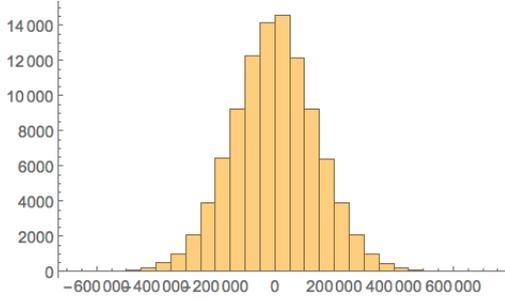


Figure 5 . Histogram, $\delta = 0.02, \epsilon = (1 - \delta)/(N - 1)$

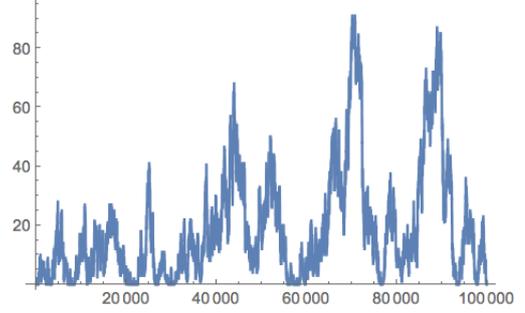


Figure 8 . Sell, $\delta = 0.01, \epsilon = 0.005$

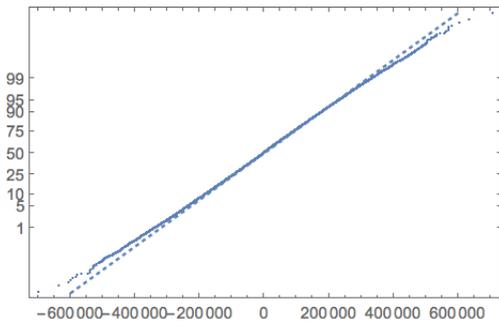


Figure 6 . Log-normal, $\delta = 0.02, \epsilon = (1 - \delta)/(N - 1)$

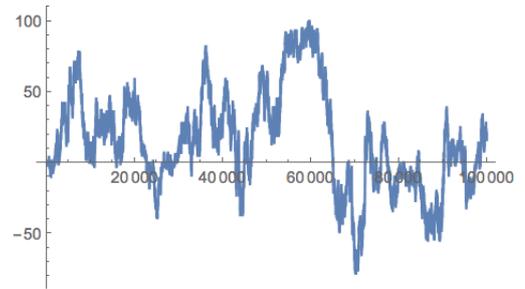


Figure 9 . Price, $\delta = 0.01, \epsilon = 0.005$

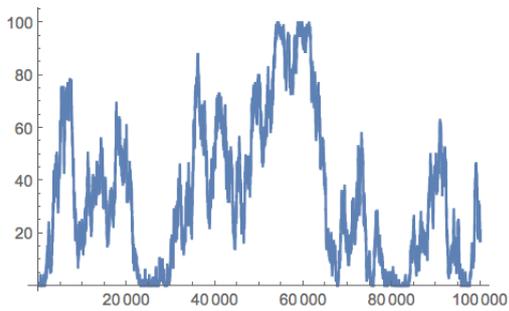


Figure 7 . Buy, $\delta = 0.01, \epsilon = 0.005$

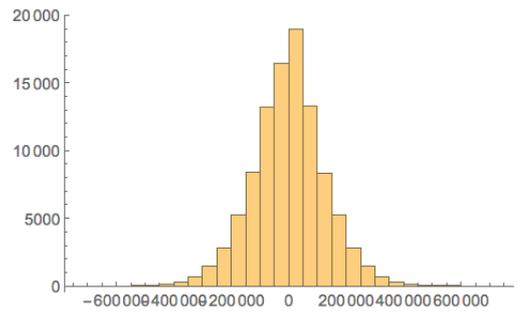


Figure 10 . Histogram, $\delta = 0.01, \epsilon = 0.005$

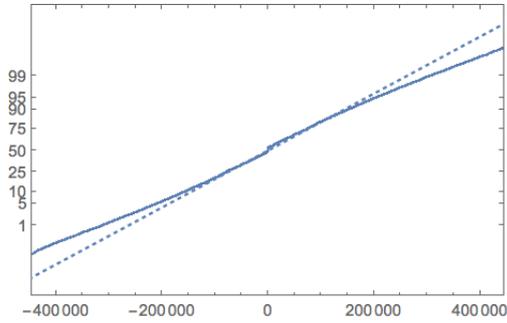


图 11 . Log-normal, $\delta = 0.01, \epsilon = 0.005$

参考文献

Keynes, J.M., 1936. *The General Theory of Employment, Interest and Money*, Macmillan Cambridge University Press.

Kirman, A., 1993. Ants, rationality, and recruitment, *Quarterly Journal of Economics* 108(1), 137-156.

Makoto, N. and Tsutomu, W., 2014. Beauty contests and fat tails in financial markets, SSRN Working Paper, 1-38.