

最適注文分割戦略と指値注文市場における長期継続性

山本竜市^a

要約

最近の金融時系列に関する実証研究で、出来高、収益率のボラティリティ、売り買い注文の長期継続性が示された。本稿では投資家の注文分割戦略がそれら長期継続性と理論的關係があることを示す。注文分割は実際の株式市場でよく見られる投資家の投資戦略の一つであるが、大口注文をもつ投資家はそれを小口に分割して発注することで、自らの注文が市場価格を変動させてしまうマーケットインパクトを低減させるものである。本稿ではこの注文分割戦略と長期継続性との理論的関連性を示す一方で、理論モデルの中でそれら現象を発生させるために必要な注文分割数の分布や注文発注パターンなど、現実と一致しない条件が必要であることから、長期継続性の発生要因は注文分割のみでなく他の要因も考えられると結論付ける。

JEL Classification: G12, G14, D44

Keywords: 注文分割, 長期継続性, 指値注文市場, エージェントベースモデル

1. はじめに

エージェントベース論とはマクロレベルで見られる経済現象の発生原因を、ミクロレベルの視点（投資家の行動や投資家同士の相互作用など）から解明する分野である。本稿では株式市場においてマクロレベルで見られる現象（特に出来高、収益率のボラティリティ、注文の売り・買いの長期継続性）に注目し、それら現象と投資家の株式注文分割戦略に強い理論的関連性があることをエージェントベースモデルを構築し説明する¹。注文分割は現在の株式市場でよく使われている戦略で、大口注文をもつ投資家はそれを小口に分割して発注することで、自らの注文が市場価格を変動させてしまうマーケットインパクトを低減させるものである。本稿では長期継続性の決定要因を解明するが、それはつまり価格や経済変数の動きの原因を理解することであり、金融市場のリスクを理解する上で重要である。

本稿で構築するエージェントベースモデルの中の投資家は注文（板）情報を観察し、マーケットインパクトから被る取引コストを最小にするよう注文を分割する。また本稿では以下二つの市場を考える。一つは、投資家が取引前に板に存在するすべての指値注文を観察できる市場で、もう一つはベストビッドとベストアスクから数えて上下 5 番目までの指値にある注文のみ観察できる市場である。取引前の情報透明性に関して言えば、初めの市場は NYSE OpenBook、ロンドン証券取引所、東京証券取引所などと類似しており、二つ目の市場は Euronext Paris, トロント証券取引所、などと類似している。これら二つのタイプのモデルで上で述べた 3 つの長期継続性が生成できたことから、現実の多くの株式市場で、注文分割戦略と 3 つの長期継続性に理論的関連性があると結論付ける。しかし一方で、長期継続性を発生させるためには非現実的な大量の成行注文数が必要であり、これはいくつかの実証結果に見られる分割成行注文数の分布や注文発注パターンなどと一致しない²。このことより、長期継続性の発生要因は注文分割のみでなく他の要因（例えば、投資家のトレンドフォロイング戦略、Chiarella, Iori, and Perelló, 2009; Lux, 1995、他の投資家の投資戦略を真似る行動、LeBaron and Yamamoto, 2008 や、投資家がザラ場の板を観察し、板の状況によって戦略を進化させる投資行動、Yamamoto, 2011 など）がかみ合って生成されているかもしれないと結論付ける。

本稿は以下 5 つの学術的貢献がある。一つは上で述べた 3 つの長期継続性を同時に再現する注文分割モデルを構築する点である。注文分割に関する先行研究（例えば、Alfonsi, Fruth, and Schied, 2010; Bertsimas and Lo, 1998; Obizhaeva and Wang, 2005 など）では最適な分割注文量を導出しているが長期継続性についての議論はない。また長期継続性を再現した論文は

^a所属先：台湾国立政治大学 国際経営学部

メールアドレス：ryuichi@nccu.edu.tw

¹本稿は Yamamoto (2012) の概要を紹介したものである。詳細は Yamamoto (2012) を参照されたい。

²先行研究の詳細は第 3 節を参照されたい。

存在するが（例えば、Chiarella, Iori, and Perelló, 2009; Alfarano, Lux, and Wagner, 2008; and Lillo, Mike, and Farmer, 2005）、3つの長期継続性を同時に再現した論文は非常に少ない³。

第二に、本稿では一つのモデルの中で最適な注文総数・分割数を計算している。上で述べた注文分割の先行研究では最適な注文総数は外生的に与えられている。第三に、本稿のモデルの投資家の戦略は過去の価格のみならず板情報にも依存している。過去のエージェントベースモデルでは投資家の戦略は過去の価格のみに依存している。しかし、板情報は将来の価格を予測する上で重要な情報であり現実の投資家は戦略形成の際その情報も役立てているはずである。第四は、本稿の理論モデルで、現実と一致した分割注文数の分布を内生的に再現している点である。つまりなぜ投資家は現実の分割注文数の分布に見られるように注文を多く分割するのかという問いに対し経済学的根拠を与えているのである。第五の貢献は、取引前情報の開示レベルの株式市場の時系列への動学的影響（長期継続性）を分析している点である。Madhavan, Porter, and Weaver (2005)や Boehmer, Saar, and Yu (2005)は取引前情報の開示レベルの株式市場への影響を分析しているが動学的影響は分析していない。

2. モデル概要

このモデルの投資家はまず myopic な期待効用を最大化させるよう注文総数を決める。次に注文を分割し期待インプリメンテーションショートフォールを最小化するよう少しずつ約定させる。投資家は $N (=1000)$ 存在し、価格を p_t と定義する。通常 p_t 取引価格であるが、取引のない期間 t の価格は最良価格の平均値とする。投資家は価格の分布がガウシアンに従うという仮定の下 constant absolute risk aversion タイプの効用を最大化するよう需要を以下のように決める。

$$d_t^i = \frac{\ln(\hat{p}_{t,t+L_t}^i / p_{t-1})}{\gamma V_t^i p_{t-1}}, \quad (1)$$

ここで V_t^i は t 期における投資家 i の条件付期待分散で γ は constant absolute risk aversion coefficient である。本稿では $V_t^i = V$ と仮定する。つまりすべての投資家は条件付期待分散に関して一様な期待をすると仮定する。ここで、 $\gamma \times V = 1$ と設定する。 $\ln(\hat{p}_{t,t+L_t}^i / p_{t-1})$ は投資家 i の期待収益率である。Farmer, Gillemot, Lillo, Mike, and Sen (2004), Gabaix, Gopikrishnan, Plerou, and Stanley (2006)や Lux (1996)などにあるよう、収益率の絶対値の分布は power law に従うとし、期待収益率の絶対値が x を上回る確率は、

$$P(\ln(\hat{p}_{t,t+L_t}^i / p_{t-1}) > x) \sim x^{-\alpha}, \quad (2)$$

に従うとする。ここで α はスケーリング指数でここでは先行実証研究の結果に倣って 2 と仮定する。すべての投資家が将来の収益率はこの分布に従うと信じそれを元に期待を形成するとする。ここで、多くのエージェントベースモデルが仮定しているように期待がファンダメンタル変数やテクニカル変数に依存しないとしているのは、ファンダメンタル変数やテクニカル変数の経済への影響を排除し、注文分割の理論的影響のみ見るためである。 t 期における投資家 i の注文総数 s_t^i は

$$s_t^i = \text{abs}(d_t^i - d_{t-1}^i), \quad (3)$$

で決まるとする。ここで $d_t^i - d_{t-1}^i$ が正ならば買い注文、負ならば売り注文を出すとする。Mike and Farmer (2008)の実証結果にあるように投資家は注文価格と最良価格の差が自由度 1.3 の Student's t -distribution に従うようランダムに注文価格を選ぶ。売りの注文価格を a_t^i とし、買いのそれを b_t^i とする。 a_t^i (b_t^i) が売り(買い)指値注文の最良価格を下回って(上回って)いる場合投資家は成行注文を出し、上回っている(下回っている)場合指値注文を出すとする。

³ Yamamoto (2011)は3つの長期継続性を同時に再現した。

投資家が成行注文を出す場合、以下のように分割する。この市場では取引前にすべての板情報が公開されているとする。投資家はその情報を元に期待取引コストを以下のように推定する。

$$E_t[C] = |x_t^i S_0 - x_t^i \hat{S}_{t+1}|, \quad (4)$$

ここで S_0 は取引を開始した時点での価格で、 x_t^i は分割し t 期に約定させる注文量である。 \hat{S}_{t+1} は $t+1$ 期における期待平均取引価格である。例えば最良売り価格が \$100 でその価格で注文数が 150 あるとし、その価格に最も近い売り指値注文価格が \$110 で注文数が 220 あるとする。もし投資家が 200 単位即座に買うならば期待取引価格 \hat{S}_{t+1} は $(\frac{150}{200}) \times \$100 + (\frac{50}{200}) \times \$110 = \$102.5$ となり、 $E_t[C]$ は $|200 \times \$100 - 200 \times \$102.5| = 500$ と計算される。投資家はさらにこの取引コストが受け入れられるコストレベル R^i を上回らない取引量 x_t^i を選ぶとする。つまり、 x_t^i は

$$E_t[C] = |x_t^i S_0 - x_t^i \hat{S}_{t+1}| \leq R^i, \quad (5)$$

を満たすように決められる。ここで $R^i \in [0, R_{\max}]$ で R^i はランダムに決められる定数とする。またそれはウェイティングコストと考えられ、 R^i が大きいと投資家は出来るだけ早く取引したいと考え、それが小さいと投資家は辛抱強く将来にわたって取引することを好む。投資家はあらかじめ決められた注文総数 s_t^i が 0 になるまでこのように注文を分割し取引量を決めるとする。またこの分割方法は現実でよく見られるインプリメンテーションショートフォール戦略もしくは arrival price 戦略と似ている。この設定から示唆されることは、投資家は最新の板情報を見ながら取引コストを取引の都度計算し、最適戦略は時間を通じてアップデートされていくことである。

ここで時間 t は投資家が成行注文を一度約定させるか指値注文を出すたびカウントされる。投資家が注文分割を始めた時期を t 期としその投資家が次の期に分割した注文が約定できる確率は

$$prob_t^i = \frac{z_t^i}{1 + \sum_i z_t^i}, \quad (6)$$

とする。 z_t^i は投資家 i の持つ残りの注文量で $\sum_i z_t^i$ はすべての投資家の注文残量の合計である。

注文分割している投資家が $t+1$ 期に約定できる確率は他の投資家が注文分割していないほど高くなる。また、注文分割していない投資家が $t+1$ 期に約定もしくは指値注文が出せる確率は $1 - prob_t^i$ となる。シュミレーションの中で注文分割していない投資家はランダムに選ばれとす。また、注文は 20000 期間後キャンセルされ最小ティックサイズは 0.1 と仮定する。

3. シュミレーションと結果の概要

前節で述べたモデルのシュミレーションを異なる R^i の範囲 (0-50, 50-100, 150-200, 450-500, 950-1000, 0-500, and 0-1000)、そしてすべての板情報が観察できるマーケット (transparent market) とベストビッドとベストアスクから数えて上下 5 番目までの指値にある注文のみ観察できる市場 (less transparent market) と別々に行った。長期継続性の統計的テストを行うため、投資家が行った 50 の行動を 1 分析時間としてこの分析時間で作られた変数に長期継続性があるか統計的テストを行った。売り・買い注文の変数であるが、もし 1 分析期間中売り注文数が買い注文数を上回っていたら -1、下回っていたら +1、同数であれば 0 と置いた。シュミレーションは 60,000 分析期間行い、最後の 10,000 期間を用い統計的テストを行った。用いた統計的手法は Giraitis, Kokoszka, Leipus, & Teyssi re (2003) によって構築された rescaled variance (V/S) test である。V/S 統計量を計算する際設定するパラメータ q は 10, 15, and 20 とし、これは変数の short-range dependence の影響を考慮するものとされている。このテストの帰無仮説は変数には short-range dependence がある、であり棄却域は 0.1869 以

上である。結果は Figures 3-6 にまとめた。Figures 3-6 にはシミュレーション 25 回の平均 V/S 推定値をそれぞれ異なる q と R^i の範囲に分けてまとめられている。

Figures 3-5 より、 R^i が 0 と 50 の範囲で決められているとき、出来高、ボラティリティー、売り買いの長期継続性が同時に再現できたことが確認される。この結果は投資家が取引コストの増加を嫌い、注文を細かく分割し将来にわたって取引を行うことを好んでいるとき長期継続性が発生するという意味である。また、Figures 6 より、収益率に長期継続性がないという意味で市場は情報効率的であることも確認された。これは指値注文市場では価格に継続的な動き（例えば継続的な買いによる継続的価格の上昇）があったとしても逆の取引がなされれば継続的に変化した分が相殺される形で価格が変化する bid-ask bounce の効果があるためと考えられる。

長期継続性は以下のプロセスを経て発生するものと考えられる。投資家が取引コストの増加を嫌い、注文を細かく分割し将来にわたって取引を行うことを望んでいるとき売りもしくは買いが継続的に行われ、売り買いの長期継続性が発生する。板の状態が大きく変化しないとき取引量は時間を通じて似たような量になり、出来高の長期継続性も発生する。投資家がこのように徐々に同じような取引を行うことより徐々に板から約定された指値注文が取り除かれ板が薄くなりビッドアスクスプレッドが大きくなっていく。そのことより価格の変化（ボラティリティー）は大きくなる。板の状態が急激に変わらないのであればボラティリティーは徐々に大きくなる。一方で板に相当量の指値注文が入ると板が厚くなることから価格変化は小さくなり、板の状態が急激に変わらないとき小さな価格変化は継続的になる。このようにしてボラティリティーの長期継続性が発生する。

次にシミュレーションから計算された分割数と注文総量を統計的に分析した。分割数を n^i 、注文総量を s_t^i とし、両変数の分布が power law に従うとすると、 n^i と s_t^i が x より大きくなる確率は

$$P(n^i > x) \sim x^{-\zeta}, \quad (7)$$

$$P(s_t^i > x) \sim x^{-\delta}, \quad (8)$$

となる。異なる R^i の範囲 (0-50, 50-100, 150-200, 450-500, 950-1,000, 0-500, and 0-1,000) を設定したモデルのシミュレーションから出てきた分割数と注文総量のデータを使い、これら ζ と δ を計算した。結果は Table 3 の通りである。

本稿のモデルで長期継続性を再現する ζ と δ はそれぞれ 1.02 と 1.29 である。しかし Vaglica, Lillo, Moro, and Mantegna (2008) と Lillio, Mike, and Farmer (2005) の実証結果によればそれらは 1.8 と 1.74 である。つまり本稿のモデルから長期継続性を再現するには現実より大きな注文総量、分割数が必要である。この事実は注文分割戦略は長期継続性と関連性はあるが、現実ではそれ以外の要因も長期継続性の発生原因であるかもしれないことを示唆している。

また、注文分割戦略が雄一の長期継続性発生の原因でないことを示すため、長期継続性を再現したモデルでの注文パターンの分析も以下二通り行った⁴。一つ目であるが、Biais, Hillion, and Spatt (1995) や Griffiths, Smith, Turnbull, and White (2000) などの実証結果によると成行注文はすべての注文のうち 28-53% を占め、ビッドアスクスプレッド内に出された指値注文は 2-19%、ビッドアスクスプレッド外に出された指値注文は 27-65% である。しかし、長期継続性を再現する本稿のモデルでは 90% 以上成行注文が占め、指値注文はごくわずかであった。二つ目の分析であるが、最近の多くの実証論文で、板の状態が投資家の投資戦略に影響を与えていることを示している。例えば、投資家は板がより多くの（少ない）指値注文が存在するという意味で厚く（薄く）なればなるほど成行注文（指値注文）を出す、という実証結果がある（例えば Biais, Hillion, and Spatt (1995) や Griffiths, Smith, Turnbull, and White (2000) など）。しかし長期継続性を再現した本稿のモデルでは板の状態が変わっても投資家は成行注文を出し続けているという傾向が見られた。これらの結果は注文分割行動が長期継続性の唯一の発生原因ではないことを示唆している。

⁴ これら結果の詳細は Yamamoto (2012) を参照されたい。

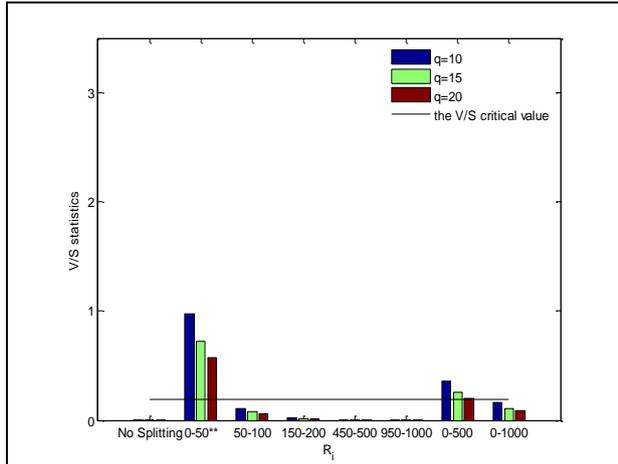


Figure 3: V/S statistics for volume

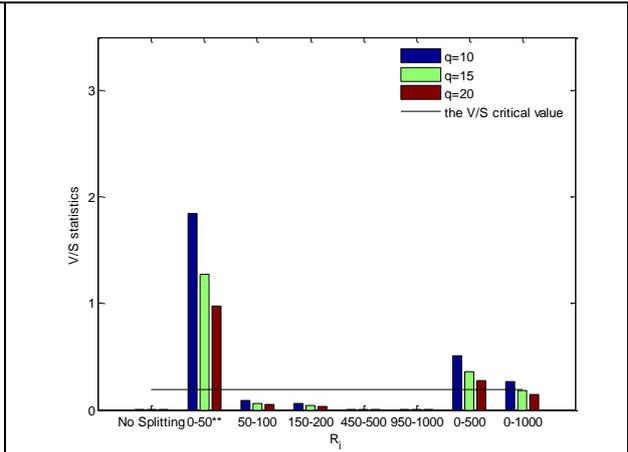


Figure 4: V/S statistics for volatility

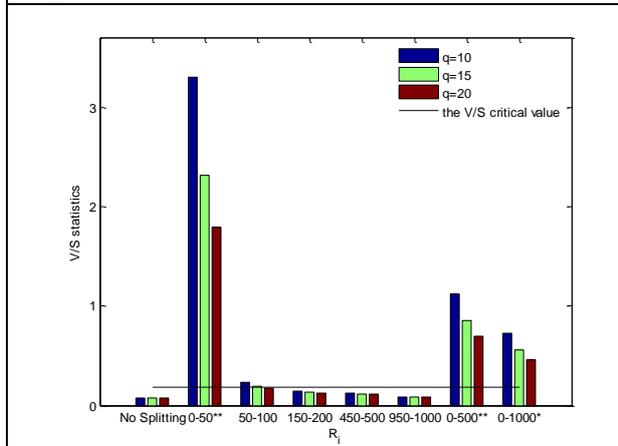


Figure 5: V/S statistics for order signs

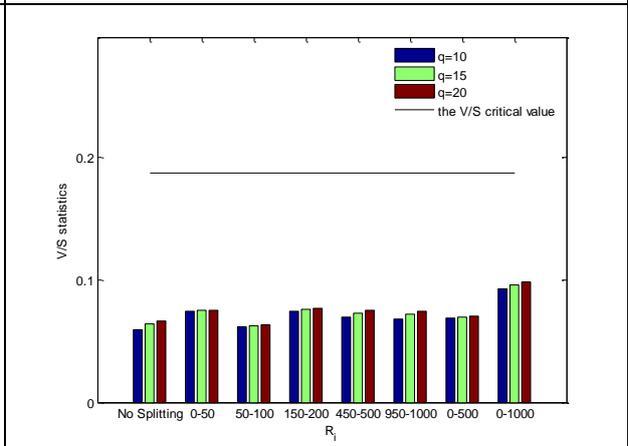


Figure 6: V/S statistics for returns

Table 3: Summary statistics of the number of splits and the total order size: **Benchmark market**. The bold numbers in our economies are means over 25 runs, while the numbers in parentheses are standard deviations over 25 runs.

Waiting cost: R^i	Exponents for the number of splits: ζ	Mean	% of splits of more than			Scaling exponent for the total order size: δ
			10	100	1,000	
0-50	1.02 (0.08)	194.67	0.60	0.23	0.03	1.29 (0.05)
50-100	1.50 (0.05)	23.40	0.46	0.03	<0.01	1.70 (0.05)
150-200	1.66 (0.05)	8.21	0.20	0.01	<0.01	1.95 (0.06)
450-500	1.82 (0.08)	2.81	0.03	<0.01	<0.01	2.15 (0.05)
950-1,000	1.97 (0.11)	1.68	<0.01	<0.01	<0.01	2.25 (0.05)
0-500	1.18 (0.14)	16.43	0.22	0.02	<0.01	1.79 (0.12)
0-1,000	1.08 (0.09)	8.97	0.11	0.01	<0.01	1.94 (0.07)

以上行った長期継続性、分割数と注文総量の分布、注文パターンの分析をベストビッドとベストアスクから数えて上下5番目までの指値にある注文のみ観察できる市場でも行ったが、統計的にまったく同じ結論が得られた。この結果の詳細もYamamoto (2012)を参照されたい。

本稿では注文分割戦略は長期継続性と理論的関連性があることを示した。しかし、その戦略が長期継続性の唯一の発生原因ではないかもしれないことも示した。つまりその現象を理解するには他の要因（投資家のトレンドフォロー戦略、他の投資家の投資戦略を真似る模倣行

動、投資家がザラ場の板を観察し、板の状況によって戦略を進化させる投資行動など) も考慮する必要があるかもしれない、ということである。

References

- Alfarano, S., Lux, T., Wagner, F., 2008. Time variation of higher moments in financial markets with heterogeneous agents: An analytical approach. *Journal of Economic Dynamics and Control* 32, 101-136.
- Alfonso, A., A. Fruth, and A. Schied, 2010. Optimal execution strategies in limit order books with general shape functions. *Quantitative Finance* 10, 143-157.
- Bertsimas, D., A. Lo, 1998. Optimal control of execution costs. *Journal of Financial Markets* 1, 1-50.
- Biais, B., Hillion, P., Spatt, C., 1995. An empirical analysis of the limit order book and the order flow in the Paris Bourse. *Journal of Finance* 50, 1655-1689.
- Boehmer, E., Saar, G., Yu, L., 2005. Lifting the veil: an analysis of pre-trade transparency at the NYSE. *Journal of Finance* 60, 783- 815.
- Chiarella, C., Iori, G., Perelló, J., 2009. The impact of heterogeneous trading rules on the limit order book and order flows. *Journal of Economic Dynamics and Control* 33, 525-537.
- Farmer, J. D., L. Gillemot, F. Lillo, S. Mike, and A. Sen. 2004. What really causes large price changes? *Quantitative Finance* 4, 383-397.
- Gabaix, X., Gopikrishnan, P., Plerou, V. and Stanley, H. E., 2006. Institutional investors and stock market volatility. *Quarterly Journal of Economics* 121, 461-504.
- Giraitis, L., Kokoszka, P., Leipus, R., Teyssiére, G., 2003. Rescaled variance and related tests for long memory in volatility and levels. *Journal of Econometrics* 112, 265-294.
- Griffiths, M., Smith, B., Turnbull, A., White, R., 2000. The costs and the determinants of order aggressiveness. *Journal of Financial Economics* 56, 65-88.
- LeBaron, B., Yamamoto, R., 2008. The impact of imitation on long memory in an order-driven market. *Eastern Economic Journal* 34, 504-517.
- Lillo, F., Farmer, D., 2004. The long memory of the efficient market. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics* 8, Article 1.
- Lillo, F., Mike, S., Farmer, D., 2005. Theory for long memory in supply and demand. *Physical Review E* 71, 066122.
- Lux, T., 1995. Herd behavior, bubbles and crashes. *The Economic Journal* 105, 881-896.
- Lux, T., 1996. The stable paretian hypothesis and the frequency of large returns: An examination of major German stocks. *Applied Financial Economics* 6, 463-475.
- Madhavan, A., Porter, D., Weaver, D., 2005. Should securities markets be transparent? *Journal of Financial Markets* 8, 266-288.
- Mike, S., Farmer, D., 2008. An empirical behavioral model of liquidity and volatility. *Journal of Economic Dynamics and Control* 32 200-234.
- Obizhaeva, A. and J. Wang, 2005. Optimal trading strategy and supply/demand dynamics. NBER Working Paper No. 11444.
- Vaglica, G., Lillo, F., Moro, E., Mantegna, R., 2008. Scaling laws of strategic behaviour and size heterogeneity in agent dynamics. *Physical Review E* 77, 036110.
- Yamamoto, R., 2011. Order aggressiveness, pre-trade transparency, and long memory in an order-driven market. *Journal of Economic Dynamics and Control* 35, 1938-1963.
- Yamamoto R., 2012. Optimal order splitting and long memory in a limit order market. Working paper, available with request at ryuichi@nccu.edu.tw.