

双曲割引を持つ異質な家計の一般均衡動学分析

大阪大学大学院経済学研究科

小島健*

JEL 分類番号： D51; D91

キーワード： 搾取、枯渇均衡、双曲割引、一般均衡分析、異質な主体

1 はじめに

本稿の目的は、準双曲割引の時間割引因子を持つ異質な家計が、資産取引を通じて搾取を引き起こすメカニズムを一般均衡下において表現し、その均衡における資産価格の振る舞いを明示することである。準双曲割引は時間非整合性を分析する際に用いられる準幾何割引の特殊ケースであり、離散時間において双曲割引を近似する数学モデルとして Laibson(1997) によって考案されたものである。

家計の行動として、借入を多く行いすぎてしまったと後悔をしたり、また、資産価格が上昇するとの誤った信念のもと、実際には価格が上昇しない不利な資産を保有したりすることが生じているように思われる。自己破産もリスクの伴う資産の保有によるもの以外に、単純な貨幣の保有とクレジットカード等による借入のみによっても引き起こされている。本稿では、不確実性を用いずに、準双曲割引の時間割引因子の下で生じる「誤った信念に基づく合理的期待形成」を導入することで、それらの行動をモデル化する。

消費者が双曲割引の下で自制問題に直面する場合、直近の異時点間選択を行う場合の時間割引率が、より将来の異時点間選択を行う場合よりも高いために、そのことを織り込まずに消費・貯蓄計画を立案すると時間の経過とともに矛盾が生じることになる。O'Donoghue and Rabin(1999) にしたがって、このように将来に発生する自らの「選好の逆転」のことを知らない消費者を「ナイーフ (naïf)」と呼び、そのことを知っている消費者を「ソフィステイクイト (sophisticate)」と呼ぶ。定義から、選好の逆転を織り込まないナイーフは、貯蓄を将来の自分に委ねることで現在の消費性向を高めるのに対して、ソフィステイクイトは矛盾のない消費・貯蓄計画を立てそれを実行する。その結果、それぞれが合理的だと考える消費・貯蓄行動から割り出される資産価格の予想はナイーフとソフィステイクイトで

* 大阪大学大学院経済学研究科博士後期過程 1 年。E-mail:mge007ot@student.econ.osaka-u.ac.jp

は異なってくる。仮にナイーフが、他のすべての消費者も同様にナイーフ自身が「合理的」だと考える行動—実は後に矛盾が生じる行動—をとると予想すれば、来期以降の市場全体の貯蓄性向を過大に予想し、その結果、ナイーフは来期の資産価格を過大に予想することになる。ソフィステイクイトはそのことを織り込んで、資産を保有せずにナイーフに貸付を行うことで超過利潤を得ることができる。

本稿では、選好の逆転に関する誤った信念から、ナイーフの合理的予想がこのようなバイアスをもつために、ソフィステイクイトとの間にポートフォリオに違いが生じ、その違いがナイーフからソフィステイクイトへの資源の流れを生み出すことを示す。本稿では、この資源の流れを搾取と呼ぶ。搾取の結果、ナイーフの所得が生存期間中に枯渇する場合も存在することが示される。この「枯渇均衡」は以下の3つの場合において生じやすくなる。(i) 現在バイアスの程度が高くなる場合、(ii) 長期の割引率が低くなる場合、そして、(iii) ソフィステイクイトの人口がナイーフの人口よりも相対的に多くなる場合である。

2 モデル

離散時間で定義される世代重複モデルを考える。各家計は時間割引因子として準双曲割引を持ち、若年期、中年期、老年期の3期間生存する。各家計にはソフィステイクイトとナイーフがいる。ソフィステイクイトとナイーフは每期 m 対1の割合で生まれてくる。ここでは総人口を1と基準化する。したがって、それぞれの人口は $m/(1+m)$ と $1/(1+m)$ となる。経済には貯蔵不可能な消費財 c と無限期間存在する減耗しない資産 a が一種類ずつ存在するとし、資産の総量を A とする。ここでは消費財をニューメレールとする。単純化のため、各人は若年期にのみ労働供給を行い w の所得を受け取る。その後2期間において所得の収入はない。また、全ての個人で割引因子と所得は等しいとし、資産の配当は0とする。更に人口成長もなく、資産の空売りはできないものとする。

t 世代の j 期 ($j \in \{t, t+1, t+2\}$) の消費量を $c_{t,j}$ とする。また、個人の貯蓄方法として、資産の保有と私的貸借契約があり、個人の私的貸借量を $s_{t,l}$ ($l \in \{t, t+1\}$) (正の時に貸付、負の時に借入を表す。)、資産保有量を $a_{t,l}$ とし、 t 期の粗利率を R_t 、資産価格を p_t とする。

次に家計の最適化行動を考える。家計の期間効用関数は対数効用関数と特定化し、将来割引は準双曲割引を所有することにより $\beta\delta$ モデルに従う。したがって、 t 世代のソフィステイクイトとナイーフの最適化行動を以下の通りに記述できる。ただし、ソフィステイクイトの変数には上付き添字として S を用い、 t 世代のナイーフの将来消費、将来資産価格など t 世代1期の将来に対する予想は上付き添字として t,l を用いる。したがって、添字のない消費量、貯蓄量はナイーフの確定した消費量を表すこととなる

ここで次の仮定を置く。

仮定 1. 各人は合理的期待形成を行う。ナイーフは全ての家計が自身と同じ最適化行動をとるという誤った信念に基づく合理的期待を形成する。ソフィスティケートはナイーフの行動を含めて状況を正しく理解しているため、完全予見である。

このナイーフに対する仮定 1 は、ナイーフが次期に自身の時間選好率が変化することを知らないために、相手の時間選好率も同様に変化しないという信念をもつというものである。ナイーフの資産価格予想は、ナイーフの誤った信念に基づいた上で、モデルと整合的な期待形成を行っているため、「誤った信念に基づく合理的期待」と呼ぶことにする。ところで、期間効用関数として対数効用を用いるとき、予想誤差がない場合の両者の最適化行動は一致する。ゆえにこのモデルでは、ナイーフとソフィスティケートの予想誤差だけが両者の行動に差異をもたらす。ソフィスティケートは自身の $t+1$ 期の最適化行動を織り込んで t 期に t 期の消費量と貸借、資産量を決定する。これに対して、ナイーフはまず t 期に誤った信念と予想のもとで生涯の消費計画を立て、同期の消費量と貸借、資産量を実行するが、 $t+1$ 期になると高くなった自身の時間割引と実際の価格を観察し、 t 期の貸借、資産量を所与として $t+1$ 期以降の最適化問題を解きなおすことになる。

加えて、均衡を一つに確定するために以下の仮定を与える。

仮定 2. t 世代のナイーフは $t+1$ 期首に完全予見となる。

この仮定 2 は、ナイーフは生まれた次の期首にソフィスティケートとなるということであり、 t 世代のナイーフが $t+1$ 期首に $t+1$ 世代のナイーフとソフィスティケートを識別することが可能になることを意味する。これは次の通りに考えられる。 t 世代のナイーフは $t+1$ 期に実際の価格に直面し予想を間違えたことに気付く。実際の $t+1$ 期の価格のもとで、 t 期の自身の最適化行動を考えると自分自身が損をしていることを理解し、 $t+1$ 期に自分自身と同様の間違いを行っている者をナイーフ、行っていない者をソフィスティケートと区別できる、ということである。

3 通常均衡と枯渇均衡

均衡において、ナイーフが形成する来期の資産価格予想は同期の実際の均衡価格よりも高くなる。これは、ナイーフが全ての個人をナイーフと予想して行動する場合、来期の市場全体の貯蓄性向を過大に評価するためである。そのような均衡では、ナイーフによる資産と貸借取引の間の裁定取引から、粗利子率は実際の異時点間価格比よりも高いナイーフ予想値と一致する。その一方で、ソフィスティケートは、資産選択の際、自分が正しく予

想する資産の異時点間価格比よりも高い粗利子率が成立するために資産を保有せずに、市場金利で貸し付ける。よって、資産はすべて生まれたばかりのナイーフによって保有される。したがって、ソフィステイクイトへ変化したナイーフは資産を需要する者がナイーフであり、需要しない者がソフィステイクイトであると区別できる。ゆえに、ソフィステイクイトへ変化したナイーフは、ナイーフへ資産を全て売却し、市場金利で貸し付ける。式で表すと以下の通りである。

$$a_{i,i} = A(1+m), a_{i,i+1} = a_{i,i}^S = a_{i+1,i}^S = 0 : \forall i \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad (1)$$

$$R_i = \frac{p_{i+1}^{i,i}}{p_i} > \frac{p_{i+1}}{p_i} : \forall i \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (2)$$

来期の均衡価格を正しく予想するソフィステイクイトから見れば、金利と資産の異時点間価格比は一致しないが、資産の空売りができないので、以上の均衡はソフィステイクイトの裁定条件には抵触しない。また、ナイーフたちの間に異質性はないため、ナイーフ一人当たりの資産保有量は、全体の資産量をナイーフの人口で割ったものとなる。

更に、中年期と老年期のナイーフの消費量が正の値をとるために以下のパラメータ条件を課す。

$$\frac{1 + \beta\delta}{\delta(1 - \beta)} > m. \quad (3)$$

この不等式は、現在バイアスの程度が高いほど (β の値が低いほど)、長期の時間割引率が低いほど (δ の値が高いほど)、ソフィステイクイトの人口倍率が高いほど (m の値が高いほど)、中年期と老年期のナイーフの消費量が正の値をとりづらいことを意味している。なお、 $\beta = 1$ の時には必ず満足する。

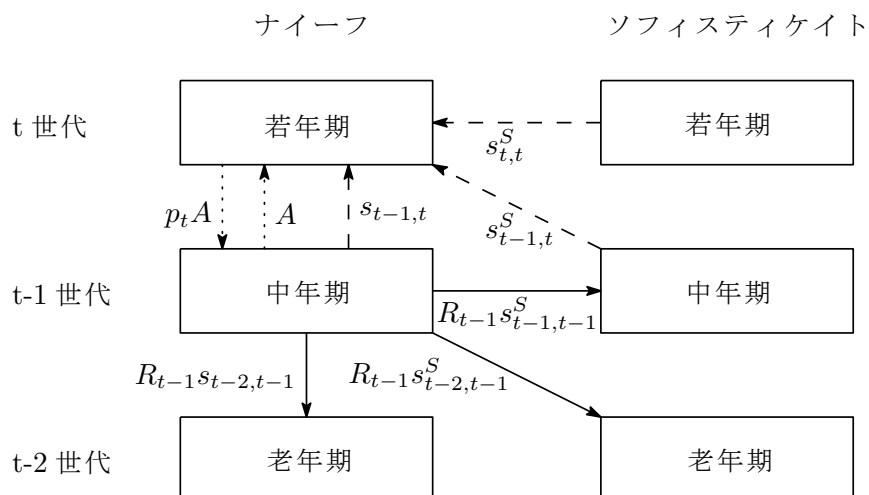


図 1: t 期の取引の流れ

点線は資産の取引とその支払いとしての消費財の流れ、破線は貸付としての消費財の流れ、実線は返済としての消費財の流れを表している。

図 1 では以上の均衡のもとで行われる t 期の資産と消費財の取引の流れを表している。
 中年期になったナイーフの予算制約式は以下の通りになる。

$$c_{t,t+1} + s_{t,t+1} \leq \frac{\beta\delta(1+\delta)wR_t}{1+\beta\delta+\beta\delta^2} - A(1+m)(p_{t+1}^{t,t} - p_{t+1}), \quad (4)$$

$$c_{t,t+2} \leq R_{t+1}s_{t,t+1}, \quad (5)$$

(4) 式右辺第二項はソフィステイクイトによる搾取である。

また、若年期ナイーフが予想する資産価格は、ナイーフの誤った信念に基づく、最適化行動と資産市場と私的貸借市場の均衡によって、以下の通りに記述できる。

$$p_t^{t-1,t-1} = \frac{\beta\delta(1+\delta)wp_{t-1}}{((1+\beta\delta+\beta\delta^2)Ap_{t-1} - \beta\delta^2w)}, \quad (6)$$

したがって、実際の市場の均衡と各人の最適化行動により、以下の通りに均衡資産価格経路も導出される。

$$p_t = \frac{\beta\delta(1+\delta)w((1+\beta\delta+\beta\delta^2)Ap_{t-1} - \beta\delta^2w(1-\beta))}{(1+\beta\delta+\beta\delta^2)A((1+\beta\delta+\beta\delta^2)Ap_{t-1} - \beta\delta^2w)}. \quad (7)$$

更に (6) 式を 1 期ずらすことにより、粗利率が

$$R_t = \frac{p_{t+1}^{t,t}}{p_t} = \frac{\beta\delta(1+\delta)w}{(1+\beta\delta+\beta\delta^2)Ap_t - \beta\delta^2w}, \quad (8)$$

と求まる。また、安定な定常均衡資産価格、定常均衡予想資産価格 (p^f) と定常均衡粗利率は

$$p = \frac{\beta\delta w}{2(1+\beta\delta+\beta\delta^2)A} \left(1 + 2\delta + \sqrt{1 + 4\delta(1+\delta)\beta}\right), \quad (9)$$

$$p^f = \frac{\beta\delta(1+\delta)w \left(1 + 2\delta + \sqrt{1 + 4\beta\delta(1+\delta)}\right)}{(1+\beta\delta+\beta\delta^2)A \left(1 + \sqrt{1 + 4\beta\delta(1+\delta)}\right)}, \quad (10)$$

$$R = \frac{2(1+\delta)}{1 + \sqrt{1 + 4\beta\delta(1+\delta)}} > 1. \quad (11)$$

と求まる。以上の議論により以下の命題が成り立つ。

命題 1. $\frac{1+\beta\delta}{\delta(1-\beta)} > m$ が満たされる時、通常均衡が存在する。

(3) 式が満たされない場合、中年期のナイーフの所得が非正となる。この場合、債務整理の制度を導入することにより、「枯渇均衡」を記述することができる。枯渇均衡において、ソフィステイクイトの人口比率である m が正の極限をとった場合、ソフィステイクイトのみが存在する経済の均衡と一致する。すなわち、枯渇均衡はソフィステイクイトのみが存在する経済との連続性を持っている。

4 結論

本稿では、資産市場を通じてソフィスティケートからナイーフへの資金の流れが存在することを一般均衡下で示した。ナイーフにとって現在バイアスは過小貯蓄の効果に加え、誤った信念を形成し、予想を間違える効果が存在する。この効果の存在によって、粗利子率は高まり、更にそれぞれの家計のポートフォリオは異なった構成となる。これが搾取を生み出すメカニズムである。また、搾取によって均衡は通常均衡と枯渇均衡が存在し、それがパラメータ条件のみによってのみ分割される。

本稿の新規性は以下の3点である。1点目は異なったポートフォリオの構築より、一般均衡下において搾取が生じるという点である。2点目は、ナイーフとソフィスティケートが異なったポートフォリオを構築することである。特に、ナイーフは自身にとって不利なポートフォリオを構築する点である。3点目は世代重複モデルを用いた一般均衡下において、家計の異質性を導入したことである。また、興味深い点として、世代重複モデルにおいて貨幣を取り扱っても、長期均衡利子が1とならないという性質がある。

引用文献

- [1] Gabrieli, Tommaso, Sayantan Ghosal. 2011. “Non-existence of competitive equilibria with dynamically inconsistent preferences.” *Economic Theory*, Online First (DOI: 10.1007/s00199-011-0623-9).
- [2] Heidhues, Paul, Botond Köszegi. 2010. “Exploiting naïvete about self-control in the credit market.” *American Economic Review*, 100(5): 2279-2303.
- [3] Krusell, Per, Bruhanettin Kuruşçu, and Anthony A. Smith, Jr. 2002. “Equilibrium welfare and government policy with quasi-geometric discounting.” *Journal of Economic Theory*, 105(1): 42-72.
- [4] Laibson, David. 1997. “Golden eggs and hyperbolic discounting.” *The Quarterly Journal of Economics*, 112(2): 443-478.
- [5] Luttmer, Erzo G. J, Thomas Mariotti. 2003. “Subjective Discounting in an Exchange Economy.” *Journal of Political Economy*, 111(5): 959-989.
- [6] O’Donoghue, Ted, Matthew Rabin. 1999. “Doing it now or later.” *American Economics Review*, 89(1): 103-124.
- [7] Sorger, Gerhard. 2007. “Time-preference and commitment.” *Journal of Economic Behavior & Organization*, 62(5): 556-578.